

Әл - Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 517.9(043)

Қолжазба құқығында

СМАДИЕВА АСЕЛЯ ГАНИЕВНА

**Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының кейбір
есептері және олардың бейлокал аналогтары**

8D05404-Іргелі және
қолданбалы математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін
дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
PhD, қауымдастырылған профессор
Төребек Б.Т.
Шетелдік ғылыми кеңесші
PhD, профессор
Ружанский М. В. (Гент, Бельгия)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2024

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ.....	4
1 РИМАН-ЛИУВИЛЛЬ БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР	
1.1 Бөлшек ретті интегралдар мен туындылар және олардың кейбір қасиеттері.....	10
1.2 Риман-Лиувилль туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебінің шешілімділігі.....	18
1.3 Риман-Лиувилль туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Нейман есебінің шешілімділігі.....	22
1.4 Риман-Лиувилль туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешілімділігі.....	25
2 КАПУТО БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР	
2.1 Капуто туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебі шешімінің кейбір қасиеттері.....	29
2.2 Капуто туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Нейман есебінің шешілімділігі.....	34
2.3 Капуто туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешілімділігі	37
2.4 Капуто туындысы қатысқан квазисызықты диффузия теңдеулері үшін Коши-Дирихле есебі шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары.....	41
2.4.1 Жартылай сызықты бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі шешімінің қасиеттері.....	42
2.4.2 Жалпыланған айнымалы коэффициентті субдиффузия теңдеуі.....	47
2.4.3 p-Лапласы субдиффузия теңдеуі.....	49
2.4.4 Бөлшек ретті кеуекті орта теңдеуі.....	51
2.4.5 Бөлшек ретті өзгешеленген диффузия теңдеуі.....	52
2.4.6 Бөлшек ретті орташа қисықтық диффузия теңдеуі.....	54
2.4.7 Кирхгоф тектес субдиффузия теңдеу.....	55
2.5 Айнымалы коэффициентті жылу өткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептер.....	57

2.5.1 Коши-Дирихле есебі.....	57
2.5.2 Коши-Нейман есебі.....	61
3 АДАМАР БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФFUЗИЯ ТЕНДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР	
3.1 Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Дирихле және Коши-Нейман есептерінің шешілімділігі.....	66
3.2 Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешілімділігі.....	70
3.3 Адамар туындысы үшін Лейбниц ережесінің аналогы және оның сызықты және квазисызықты есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданылуы.....	73
3.3.1 Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептердің шешімдерінің априорлық бағалаулары.....	75
3.3.2 Адамар туындысы қатысқан кеуекті орта теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептердің шешімдерінің априорлық бағалаулары.....	80
4 КАПУТО-АДАМАР БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФFUЗИЯ ТЕНДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР	
4.1 Капуто-Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебінің шешілімділігі.....	84
4.2 Капуто-Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Нейман есебінің шешілімділігі.....	89
4.3 Капуто-Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешілімділігі.....	91
4.4 Капуто-Адамар туындысы үшін Лейбниц ережесінің аналогы және оның сызықты және квазисызықты есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданылуы	95
ҚОРЫТЫНДЫ.....	103
ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	104

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Бұл диссертациялық жұмыс бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешілімділігін және шешімдерінің бағалауларын зерттеуге арналған. Жұмыстың мақсаты – келесі түрдегі бөлшек ретті диффузия теңдеуін

$$\partial_t^\alpha u(x, t) - a(t)A(u(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (0.1)$$

зерттеу, мұндағы $0 < \alpha \leq 1$, $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ облысы $\partial\Omega$ тегіс шекарасы бар шенелген аймақ немесе $\Omega \equiv \mathbb{R}^N$, және ∂_t^α – келесі бөлшек ретті операторлардың бірі болып табылады:

- Бөлшек ретті Капуто туындысы:

$$\partial_t^\alpha = {}^c D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \partial_s u(x, s) ds;$$

- Бөлшек ретті Риман – Лиувилль туындысы:

$$\partial_t^\alpha = D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(x, s) ds;$$

- Бөлшек ретті Капуто – Адамар туындысы:

$$\partial_t^\alpha = {}^c D_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f'(s) \frac{ds}{s};$$

- Бөлшек ретті Адамар туындысы:

$$\partial_t^\alpha = {}_H D_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f(s) \frac{ds}{s}$$

және $A(u)$ төмендегі сызықты және квазисызықты операторлардың бірі:

- Лаплас операторы:

$$A(u) := \Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2};$$

- p - Лаплас операторы:

$$A(u) := \Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u);$$

- Кеукті орта операторы:

$$A(u) := \nabla(g(u)\nabla u);$$

- Өзгешеленген оператор:

$$A(u) := f(u)\Delta u;$$

- Орташа қисықтық операторы:

$$A(u) := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right);$$

- Кирхгоф операторы:

$$A(u) := M(\|\nabla u\|_{L^q})\Delta u.$$

Сонымен қатар, $a(t)$ функциясы келесі теңсіздікті

$$(H): a(t) \geq kt^\beta, \beta > -\alpha, k > 0$$

қанағаттандырсын деп болжаймыз.

Бұл диссертациялық жұмыста келесі негізгі нәтижелер алынды:

- Уақыт бойынша Риман-Лиувилль, Капуто, Адамар, Капуто-Адамар бөлшек ретті туындылары қатысқан өзгешеленген диффузия теңдеулері үшін бастапқы-шеттік және бастапқы есептердің шешілімділігі зерттелінді.
- Уақыт бойынша Капуто туындысы қатысқан айнымалы коэффициентті сызықты және квазисызықты параболалық есептердің шешімдерінің уақыт бойынша асимптотикалық бағалаулары алынды.
- Адамар және Капуто-Адамар туындылары үшін Лейбниц ережесінің аналогтары алынып, олардың бөлшек ретті диффузия теңдеулеріне қойылған бастапқы-шеттік есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданысы келтірілді.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. (0.1) өрнегімен берілген теңдеу бөлшек ретті дербес туындылы теңдеу деп аталады. Мұндай теңдеулер баяу диффузия процесстерін сипаттайды (мысалға [1-6] жұмыстарды қараңыз).

Бөлшек ретті есептеулер математикалық моделдеуде, механикада, физикада және т.б. салаларда кеңінен қолданылады [1-8]. Бөлшек ретті туындылардың әртүрлі анықтамалары бар, олар туралы толық ақпаратты көптеген еңбектерден көруге болады (мысалы [9-12] және ондағы сілтемелерді қараңыз). Соңғы жылдары, бөлшек ретті туындыларды қамтитын сызықты және квазисызықты диффузия теңдеулерін зерттеу көптеген ғалымдардың назарын аударуда, атап айтар болсақ Л. Каффарелли, М. Ямамото, Р. Захер, Ю. Лучко, С. Дипиеро, Э. Вальдиноччи, М.О. Мамчуев, А.В. Псху, М. Киране, М. Ружанский, Б. Турметов және т.б. еңбектері (мысалы, [8,13-34] жұмыстарды және ондағы сілтемелерге қараңыз). Сәйкесінше, аталған теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептерді зерттеуде олардың локалды және глобалды шешілімділігі туралы нәтижелер айтарлықтай өзекті болып табылады (мысалы, [20-30]).

Эволюциялық теңдеулерге қойылған есептердің қисындылығынан басқа, шешімдердің асимптотикалық қасиеттері де ерекше қызығушылық тудырады. Тұрақты коэффициентті немесе шенелген айнымалы коэффициентті бөлшек ретті параболалық есептердің шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары Ю. Лучко, М. Ямамото, Ч. Ли, Р. Захер, Э. Вальдиноччи және тағы басқалардың жұмыстарында алынған (мысалы, [28 – 32]).

Атап өтер болсақ, В. Вергара мен Р. Захер [30], С. Дипиеро, Э. Вальдиноччи, В. Веспри [32] келесі түрдегі

$$\partial_t^\alpha u(t, x) + \mathcal{N}[u](t, x) = 0 \quad (0.2)$$

жалпы субдиффузия теңдеуін зерттеді, мұндағы $\mathcal{N}[u]$ операторы келесі операторлардың бірі бола алады: Лаплас, р-Лаплас, кеуекті орта операторы, қоссызықты емес операторы, орташа қисықтық операторы, бөлшек ретті Лаплас операторы, бөлшек ретті р-Лаплас операторы, әртүрлі бөлшек ретті операторларының қосындысы, бөлшек ретті кеуекті орта операторы, бөлшек ретті орташа қисықтық операторы.

Сондай-ақ, $\mathcal{N}[u]$ операторы берілген $s \in (1, +\infty)$, $\gamma \in (0, +\infty)$, және $C > 0$ үшін келесі теңсіздікті

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^s(\Omega)}^{s-1+\gamma} \leq C \int_{\Omega} u^{s-1}(t, x) \mathcal{N}[u](t, x) dx$$

қанағаттандыруы болжанады. Онда (0.2) теңдеуі үшін берілген Коши-Дирихле есебінің шешімі келесі теңсіздікті

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{M}{1 + t^{\frac{\gamma}{s}}}, M > 0, \alpha \in (0, 1)$$

қанағаттандыратыны дәлелденген. Сондай-ақ, шенелген айнымалы коэффициентті субдиффузия теңдеуінің шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары да жеткілікті дәрежеде зерттелген (мысалы, [20, 23, 24]). Бізге

белгілі ақпараттарға сәйкес, сингулярлы коэффициенті бар бөлшек ретті диффузия теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептердің шешілімділігі Б. Турметов және Б. Кадиркуловтың [13], Х. Донг және Д. Кимнің [22], Р. Захердің [25, 27] және басқалардың кейбір жұмыстарында зерттелгенімен, шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары зерттелмеген.

Уақытқа тәуелді коэффициенттері бар бөлшек ретті диффузиялық теңдеулер аномалды диффузия процестерін моделдейді (мысалы, [36-39] жұмыстарды қараңыз). Келесі қарапайым теңдеу

$$\partial_t^\alpha u(t, x) - t^\beta u_{xx}(t, x) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > -\alpha \quad (0.3)$$

негізінде аномалды диффузия процесіне уақытқа тәуелді коэффициенттің әсерін [36-39] жұмыстардың идеясын қолданып сипаттайық. (0.3) теңдеуінің орташа квадраттық орын ауыстыруы келесі формуламен анықталады

$$\langle x^2 \rangle \sim t^{\alpha+\beta}.$$

Егер $0 < \alpha + \beta < 1$ болса, онда (0.3) теңдеуі субдиффузия процесін, ал $\alpha + \beta > 1$ болғанда супердиффузия процесін сипаттайды. Ал $\alpha + \beta = 1$ жағдайында, $\alpha < 1$ болғанына қарамастан (0.3) бөлшек ретті диффузия теңдеуі нормал диффузия процесін сипаттайды. Сондай-ақ, $\alpha = -\beta$ жағдайы толық стационар диффузия процесін сипаттайды.

Қорыта айтар болсақ, (0.3) теңдеуінің аномалды диффузияны сипаттауда қолданысы және сингулярлы коэффициентті жағдайда зерттелмеуі, осы тектес теңдеулерге қойылған әртүрлі есептерді зерттеуге мүмкіндік береді.

Зерттеу әдістері.

Диссертацияда қойылған есептерді зерттеу кезінде бөлшек ретті есептеулер теориясының әдістері, функционалдық талдау теориясы мен дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістері қолданылды.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл диссертациялық жұмыста зерттелген сызықты және квазисызықты бөлшек ретті туынды қатысқан мәселелер жаңа болып табылады, сонымен қатар классикалық сызықты есептерді, сондай-ақ маңызды қолданыстары бар квазисызықты есептер класын қамтиды. Қарастырылып отырған мәселелер негізінен осыған дейін зерттелінбеген немесе дербес жағдайлары үшін ғана зерттелінген. Сондықтан, ғылыми-зерттеу жұмысы белгілі нәтижелерді жалпылайды және толығымен жаңа нәтижелерді қамтиды.

Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңыздылығы.

Зерттеу тақырыбы негізінен теориялық және фундаменталды болып табылады. Дегенмен, диссертацияда қарастырылған есептер аномалды диффузия процестерін сипаттауда қолданысқа ие.

Бұл жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.

Диссертациялық жұмыс AP08052046 «Бейсызықты дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің кейбір бейлокал аналогтары» (2020–2022), AP09259578 «Интегро-дифференциалдық диффузия теңдеулері мен жүйелері үшін Фуджита тектес критикалық көрсеткіштер» (2021-2023) тақырыптарындағы ҚР БҒМ жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулерді гранттық қаржыландыру жобалары, AP19175678 «Айнымалы коэффициенттері бар бөлшек ретті эволюция теңдеулері шешімдерінің асимптотикасы» (2023-2025) тақырыбындағы «Жас ғалым» жобасы бойынша жас ғалымдардың зерттеулерін гранттық қаржыландыру жобасы және Назарбаев университетінің OPCR2023001 «Бейлокальды және бөлшек туындылы модельдердің сапалық талдауы» гранттық жобасы шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі. Диссертациялық жұмыста келтірілген барлық нәтижелер докторанттың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынды. Ғылыми кеңесшілер мен басқа авторлар есептің қойылымына және алынған нәтижелерді талқылауға өз үлестерін қосты.

Диссертациялық жұмыстың сынақтан өтуі мен талқылануы

Диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер келесі халықаралық конференциялар мен ғылыми семинарларда баяндалып талқыланды:

Халықаралық ғылыми конференциялар:

- «Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day», Алматы, 2021;
- IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры», Мамыр, 2022, Ақтөбе;
- XII International Conference of the Georgian Mathematical Union, Тамыз, 2022. Батуми, Грузия;
- Международная научная конференция «Анализ, Дифференциальные уравнения и их приложения», Маусым, 2023, Астана;
- Summer School Workshop “Modern Problems in PDEs and Applications”, Тамыз, 2023, Гент Университеті, Бельгия;
- VII World Congress of Mathematicians of the Turkic World (TWMS Congress-2023), Қыркүйек, 2023, Түркістан;
- Annual International April Mathematical Conference, Сәуір, 2024, Алматы.

Ғылыми семинарлар:

- Гент университетінің (Бельгия) «Analysis and PDE» орталығының ғылыми семинары. Жетекшісі: профессор М. Ружанский;
- Ахмет Ясауи университетінің «Математикалық физиканың классикалық емес есептері» ғылыми семинары. Жетекшісі: профессор Б. Турметов;
- «Дифференциалдық операторлар және олардың қолданыстары» қалалық ғылыми-зерттеу семинары (Алматы). Жетекшісі: академик Т.Ш. Кәлменов.

Диссертация тақырыбы бойынша 6 ғылыми мақала [42-47], соның ішінде 2 жарияланым Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт-факторы бар шетелдік журналдарда, 3 жарияланым ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда жарияланды және бір мақала баспаға қабылданды.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен сипаттамасы.

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 4 тараудан, қорытынды және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың көлемі - 107 бет. Әдебиеттер саны - 52.

Бірінші тарауда диссертациялық жұмыста қолданылған анықтамалар, леммалар мен қасиеттер және Риман-Лиувилль бөлшек ретті диффузия теңдеуіне қойылған Коши, Коши-Дирихле, Коши-Нейман есептері қарастырылды. Келтірілген есептердің шешімдерінің бар болуы, жинақтылығы мен жалғыздығы дәлелденді.

Екінші тарауда Капуто мағынасындағы бөлшек ретті туындысы бар сызықты және квазисызықты диффузия теңдеуіне қойылған есептердің шешімділігі мен шешімнің бағалаулары зерттелген.

Үшінші және төртінші тарауларда Адамар және Капуто-Адамар бөлшек ретті туындылары бар сызықты, квазисызықты диффузия теңдеулері қарастырылды. Сондай ақ Адамар және Капуто-Адамар бөлшек ретті туындылары үшін Лейбниц ережесінің аналогтары алынып, олардың қолданысы ретінде бөлшек ретті сызықты, квазисызықты диффузия теңдеулері үшін есептердің шешімінің априорлы бағалаулары алынды.

1 РИМАН-ЛИУВИЛЬ БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФФУЗИЯ ТЕНДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР

1.1 Бөлшек ретті интегралдар мен туындылар және олардың кейбір қасиеттері

1.1.1 – анықтама [9, 1 бет] Айталық $\Omega = [a, b] (-\infty \leq a < b \leq \infty)$ аралығы $\mathbb{R}$ нақты сандар өсінің шекті немесе шексіз интервалы болсын. $L^p(a, b) (1 \leq p \leq \infty)$ арқылы Ω бойынша $\|f\|_p < \infty$ болатын Лебег комплексті өлшенетін f функцияларының жиынын белгілейміз

$$\|f\|_{\Omega} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \quad (1.1.1)$$

және

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \quad (1.1.2)$$

Мұнда $\operatorname{ess\,sup} |f(x)| - |f(x)|$ функциясының маңызды максимумы.

1.1.2 – анықтама [9, 3 бет] Айталық, $\Omega = [a, b] (-\infty \leq a < b \leq \infty)$ және $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ болсын. $C^m(\Omega)$ деп Ω облысында m рет үзіліссіз дифференциалданатын, келесі нормамен анықталған функциялардың кеңістігін

$$\|f\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^m \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (1.1.3)$$

белгілейміз. Атап айтқанда, $m = 0, C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ үшін нормасы бар болатын Ω бойынша f үзіліссіз функциялардың кеңістігі

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|. \quad (1.1.4)$$

1.1.3 – анықтама [9, 4 бет] $C_{\gamma, \log}[a, b]$ үзіліссіз функциялар кеңістігі

$$C_{\gamma, \log}[a, b] = \left\{ g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}: \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\gamma} g(t) \in C[a, b] \right\}, \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (1.1.5)$$

болсын. $C_{\gamma, \log}[a, b]$ кеңістігінде норма

$$\|g\|_{C_{\gamma, \log}[a, b]} = \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\gamma} g(t) \right\|_{C[a, b]}, \quad C_{0, \log[a, b]} = C[a, b] \quad (1.1.6)$$

теңдігі арқылы анықталады.

1.1.4 – анықтама [9, 5 бет] Кез-келген $n \in \mathbb{N}$ үшін $C_{\delta, \gamma}^n[a, b]$ арқылы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз δ -туындылары $n - 1$ ретіне дейін және туынды болатын $g(t)$ функцияларының Банах кеңістігін

$$C_{\delta, \gamma}^n[a, b] = \left\{ g: \|g\|_{C_{\delta, \gamma}^n[a, b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \|\delta^k g\|_{C[a, b]} + \|\delta^n g\|_{C_{\gamma, \log}[a, b]} \right\}, \quad (1.1.7)$$

$$C_{\delta, \gamma}^0[a, b] = C_{\gamma, \log}[a, b]$$

түрінде белгілейміз. $(\delta^n g)(t)$ - n ретті $(a, b]$ бойынша $(\delta^n g)(t) \in C_{\gamma, \log}[a, b]$.

1.1.5 – анықтама [9, 3 бет] $AC_{\delta}^n[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ кеңістігі келесі түрде

$$AC_{\delta}^n[a, b] = \left\{ u: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}: \delta^{n-1}[u(t)] \in AC[a, b], \delta = t \frac{d}{dt} \right\} \quad (1.1.8)$$

анықталады. $AC_{\delta}^1[a, b]$ кеңістігі $AC[a, b]$ кеңістігімен сәйкес келеді.

1.1.6 – анықтама [9, 10 бет] Бір өлшемді жағдайдан бастаймыз. $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ нақты айнымалысы бар $\phi(t)$ функциясының Фурье түрлендіруі мына түрде

$$(\mathcal{F}\phi)(x) = \mathcal{F}[\phi(t)](x) = \hat{\phi}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \phi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1.1.9)$$

анықталады. Кері Фурье түрлендіруі келесі формуламен

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \mathcal{F}^{-1}[g(t)](x) = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(-x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} g(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1.1.10)$$

берілген. (1.1.9) бен (1.1.10) өрнектеріндегі интегралдар $\phi, g \in L^1(\mathbb{R})$ функциялары үшін және $\phi, g \in L^2(\mathbb{R})$ үшін $L^2(\mathbb{R})$ кеңістігінің нормасында абсолютті жинақталады.

1.1.7 – анықтама [9, 24 бет] Эйлер гамма функциясы $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re(z) > 0) \quad (1.1.11)$$

формуласымен анықталады, мұндағы $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$. Бұл интеграл барлық комплекс $(\Re(z) > 0)$ айнымалылар үшін жинақты болады.

1.1.8 – анықтама Кез-келген $\Re(x), \Re(y) > 0$ үшін Бета функциясы келесі түрде анықталады

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (1.1.12)$$

1.1.9 – қасиет Бета функцияның Гамма функциясы арасындағы байланыс келесі теңдік арқылы

$$B(x+y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, (\Re(x), \Re(y) > 0) \quad (1.1.13)$$

өрнектеледі.

1.1.10 – анықтама [9, 69 бет] $\Omega = [a, b] (-\infty < a < b < \infty)$ нақты $\mathbb{R}$ - өсіндегі шекті интервал болсын. Сол жақты және оң жақты Риман-Лиувилль бөлшек интегралдар $I_{a+,t}^\alpha f$ және $I_{b-,t}^\alpha f$ реті $\alpha \in \mathbb{C} (\Re(\alpha) > 0)$ болатын сәйкесінше

$$(I_{a+,t}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \Re(\alpha) > 0) \quad (1.1.14)$$

және

$$(I_{b-,t}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b; \Re(\alpha) > 0) \quad (1.1.15)$$

формулалармен анықталады. Мұндағы $\Gamma(\alpha)$ Эйлер Гамма функциясы.

1.1.11 – анықтама [9, 70 бет] $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ интегралданатын функциясы үшін $0 < \alpha < 1$ ретті Риман-Лиувилль бөлшек туындысы

$$D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (1.1.16)$$

формуласымен анықталады.

1.1.12 – анықтама [9, 97 бет] Абсолютті үзіліссіз (туынды) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ функциясы үшін $0 < \alpha < 1$ ретті Капуто бөлшек туындысы

$${}^c D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (1.1.17)$$

өрнегімен анықталады.

1.1.13 – қасиет [9, 91 бет] $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютті үзіліссіз (туындылы) функция үшін Риман-Лиувилль және Капуто бөлшек туындылары арасындағы қатынас

$${}^c D_{0+,t}^\alpha f(t) = D_{0+,t}^\alpha (f(t) - f(0)), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.1.18)$$

теңдігімен беріледі.

1.1.14 – анықтама [9, 110 бет] $f \in L^1_{loc}([a, b])$ болсын, мұндағы $-\infty \leq a < t < b \leq +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) ретті ${}_H I_{a+,t}^\alpha$ Адамар бөлшек интегралы келесі түрде

$${}_H I_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s} \quad (1.1.19)$$

болады, мұндағы Γ - Эйлер гамма функциясы деп аталады.

1.1.15 – анықтама [9, 111 бет] $f \in L^1([a, b])$, $-\infty \leq a < t < b \leq +\infty$ және ${}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} f \in W_2^1([a, b])$, $0 < \alpha < 1$ болсын, мұндағы $W_2^1([a, b])$ Соболев кеңістігі. α ретті ${}_H D_{a+,t}^\alpha$ Адамар бөлшек туындысы

$${}_H D_{a+,t}^\alpha f(t) = t \frac{d}{dt} {}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f(s) \frac{ds}{s} \quad (1.1.20)$$

өрнегімен анықталады.

1.1.16 – анықтама [9, 115 бет] $0 < \alpha < 1$ және $f \in W_2^1([a, b])$ болсын. α ретті Адамар типті бөлшек туындысы

$${}_C D_{a+,t}^\alpha f(t) = {}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} t \frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f'(s) ds \quad (1.1.21)$$

арқылы жазылады.

1.1.17 – лемма [9, 116 бет] Айталық, $0 < \alpha < 1$ және $0 < a$ болсын. Сондай-ақ, $I_{a+,t}^{1-\alpha} f$ - f функциясының $1 - \alpha$ ретті Адамар бөлшек интегралы. Егер $f \in C_{\mu, \log}[a, b]$ ($0 \leq \mu < 1$) және $I_{a+,t}^{1-\alpha} f \in C_{\delta, \mu}^1[a, b]$ болса, онда

$$\left({}_H I_{a+,t}^\alpha {}_H D_{a+,t}^\alpha f \right)(t) = f(t) - \frac{\left({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} f \right)(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}, t \in [a, b] \quad (1.1.22)$$

теңдігі орынды.

1.1.18 – қасиет [9, 86 бет] Егер $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$, $\Re(\mu) > 0$, және $\lambda \in \mathbb{C}$ болса, Риман-Лиувилль бөлшек интегралы үшін (1.1.15), келесі өрнек

$$\left(I_{0+,t}^\alpha t^{\beta-1} E_{\mu, \beta}(\lambda t^\mu) \right)(t) = t^{\alpha+\beta-1} E_{\mu, \beta+\alpha}(\lambda t^\mu), t > 0 \quad (1.1.23)$$

орынды болады, мұндағы екі параметрлі Миттаг-Леффлер функциясы $E_{\alpha, \beta}(z)$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}$$

түрде анықталады.

1.1.19 – қасиет [9, 115 бет] Егер $f \in AC[a, b]$ болса, онда $\alpha \in (0, 1)$ ретті Адамар бөлшек туындысы келесі түрде

$${}_H D_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{-\alpha} + {}_H D_{a+,t}^\alpha f(t) \quad (1.1.24)$$

ұсыныла алады.

1.1.20 – қасиет [9, 112 бет] Егер $\beta > \alpha > 0$, және $-\infty < a < b < +\infty$ болса, онда

$${}_H D_{a+,t}^\alpha \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta-\alpha-1} \quad (1.1.25)$$

теңдігі орындалады.

1.1.21 – қасиет [9, 112 бет] Егер $0 < \alpha < 1$ және $-\infty < a < b < +\infty$ болса, онда ${}_H D_{a+,t}^\alpha \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} = 0$ болады.

1.1.22 – анықтама [40, 5.1 – ескерту] Килбас-Сайго функциясын

$$E_{\alpha,m,n}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+n)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+n+1)+1)} z^k, \quad (1.1.26)$$

Килбас пен Сайго форманың ерекше функциясы тұрғысынан енгізген. Мұнда α, m нақты сандар және $n \in \mathbb{C}$

$$\alpha > 0, m > 0, \alpha(jm+n)+1 \neq -1, -2, -3, \dots (j \in \mathbb{N}_0)$$

арқылы беріледі.

Атап айтқанда, егер $m = 1$ болса, $E_{\alpha,m,n}(z)$ функциясы екі параметрлі Миттаг-Леффлер функциясына:

$$E_{\alpha,1,n}(z) = \Gamma(\alpha n + 1) E_{\alpha,\alpha n+1}(z)$$

келтіріледі.

Екі параметрлі Миттаг-Леффлер функциясы, кейде Миттаг-Леффлер-типті функция деп аталады, алғаш рет [48] жазылды. Егер $m = 1, n = 0$ болса, онда ол классикалық Миттаг-Леффлер функциясымен

$$E_{\alpha,1,0}(z) = E_{\alpha,1}(z),$$

сәйкес келеді, мұндағы классикалық Миттаг-Леффлер функциясы $E_{\alpha,1}(z)$ ([49])

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0, z \in \mathbb{C}.$$

Сәйкесінше, $\alpha = 1$ жағдайында, $E_{1,1}(z) = e^z$ экспонентті функцияға тең. Төменде $\alpha = 1, m > 1, n = m - 1$ болмағанда, Килбас-Сайго функциясының ерекше жағдайын есептейміз. Демек,

$$\begin{aligned} E_{1,m,m-1}(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma((jm + m - 1) + 1)}{\Gamma((jm + m) + 1)} z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(jm + m)}{\Gamma(jm + m + 1)} z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(jm + m)} z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{m}\right)^k = e^{\frac{z}{m}} \end{aligned}$$

осыдан $E_{1,m,m-1}(z) = e^{\frac{z}{m}}$ шығады.

[9, 36, 40 беттер] Бір және екі параметрлі Миттаг-Леффлер функциялары

$$E_{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, (z \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0),$$

және

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (z, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0)$$

формулаларымен берілген.

$\beta = 1$ болғанда, $E_{\alpha,\beta}(z)$ функциясы $E_{\alpha}(z)$ түрілде жазылады. Әлбетте,

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z), E_{1,1}(z) = E_1(z) = e^z.$$

Сызықтық жағдайлар үшін біздің негізгі нәтижелерімізді дәлелдеу барысында барлық $\alpha \in (0,1], m > 0$ және $z \geq 0$ үшін Килбас-Сайго функциясының [41, 2 - теорема] оптималды бағалауы

$$\frac{1}{1+\Gamma(1-\alpha)z} \leq E_{\alpha,m,m-1}(-z) \leq \frac{1}{1+\frac{\Gamma(1+(m-1)\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)}z}, z \geq 0 \quad (1.1.27)$$

мен [41, 2 – мәлімдеме] жоғарыдан бағалауы

$$E_{\alpha,m,m-\frac{1}{\alpha}}(-z) \leq \frac{1}{\left(1+\frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))}z\right)^{1+\frac{1}{m}}} \quad (1.1.28)$$

негізгі рөлдерді атқарады.

Теңсіздіктер. Бізге келесі теңсіздіктер қажет.

Юнг теңсіздігі:

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p}{p} a^p + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}, p + q = pq, \varepsilon > 0,$$

мұндағы a, b оң нақты сандар.

Гелдер теңсіздігі:

$$\int_{\Omega} |f||g|dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, p + q = pq, p > 1, q > 1.$$

1.1.23 – лемма [50, 3.1 – лемма] $\alpha > 0, u(t), v(t)$ теріс емес функциялар және $0 < a \leq t < T \leq \infty$ бойынша локалды интегралданатын болсын, ал $\mathcal{M}(t)$ теріс емес айқын емес үзіліссіз анықталған функция, $0 < a \leq t < T \leq \infty, \mathcal{M}(t) \leq m$ (тұрақты)

$$u(t) \leq v(t) + \mathcal{M}(t) \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} u(s) \frac{ds}{s},$$

бұдан

$$u(t) \leq v(t) + \int_a^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathcal{M}(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} \left(\log \frac{t}{s} \right)^{k\alpha-1} \frac{v(s)}{s} \right] ds$$

шығады.

1.1.24 – лемма [51, 152 бет] Теріс емес абсолютті үзіліссіз $y(t)$ функциясы $[a, T]$ аралығында барлық t үшін

$$\frac{\partial y(t)}{dt} \leq c_1(t)y(t) + c_2(t)$$

теңсіздікті қанағаттандырсын. Мұнда $c_i(t), i = 1, 2$ теріс емес функциялар, онда

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \exp \int_0^t c_1(\tau) d\tau \cdot \left[y(a) + \int_0^t c_2(\xi) \exp \left(- \int_0^t c_1(\tau) d\tau \right) d\xi \right] \\ &\leq \exp \int_0^t c_1(\tau) d\tau \cdot \left[y(a) + \int_0^t c_2(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

теңсіздігі орынды.

1.1.25 – лемма Теріс емес абсолютті үзіліссіз $y(t)$ функциясы $[a, T]$ аралығында барлық t үшін

$$\partial_t^\alpha y(t) \leq c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

теңсіздігін қанағаттандырсын, мұнда $c_1 > 0$ және $c_2(t)$ $[a, T]$ бойынша интегралданатын теріс емес функция болып табылады. Осыдан

$$y(t) \leq y(a) E_\alpha \left(c_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) + \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha} \left(c_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) \partial_{a,t}^{-\alpha} c_2(t)$$

теңсіздігі орындалады. Мұндағы $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + 1)$ және $E_{\alpha, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + \mu)$ Миттаг-Леффлер функциялары.

1.1.25 – леммасының дәлелдеуі. Айталық, $\partial_t^\alpha y(t) - c_1 y(t) = g(t)$ болсын, онда

$$y(t) = y(a) E_\alpha \left(c_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) + \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(c_1 \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau$$

теңдігі орынды.

$g(t) \leq c_2(t)$ болғандықтан, Миттаг-Леффлер функциясы $E_{\alpha,\alpha} \left(c_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right)$ берілген параметрлері үшін ондылығы және өсу $E_{\alpha,\alpha}(t)$ функциясын (50)- ден

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(a)E_{\alpha} \left(c_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) + \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(c_1 \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) \frac{c_2(\tau)}{\tau} d\tau \\ &\leq y(a)E_{\alpha} \left(c_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha} \left(c_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) \partial_{a,t}^{-\alpha} c_2(t) \end{aligned}$$

аламыз.

Лемма толық дәлелденді.

1.1.26 – теорема (Харди-Литтлвуд-Соболев) Егер $p > 1$ және $\alpha = n \left(1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right)$ болса, онда

$$\|T_{\alpha}f\|_q \leq \|f\|_p,$$

мұндағы $T_{\alpha}f := f * k_{\alpha} = \int_{\mathbb{R}^N} |t - \tau|^{-\alpha} f(\tau) d\tau$ және $k_{\alpha} := |t|^{-\alpha}$.

1.2 Риман-Лиувилль туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебінің шешілімділігі

Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ шекарасы $\partial\Omega$ тегіс ашық шенелген облыс болсын. Төмендегі Дирихле шекаралық және Коши бастапқы шарттарымен берілген бөлшек ретті диффузия теңдеуін

$$D_{0+,t}^{\alpha} u(t, x) - t^{\beta} \Delta_x u(t, x) = 0, (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (1.2.1)$$

$$u(t, x) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega, \quad (1.2.2)$$

$$I_{0+,t}^{1-\alpha} u(0, x) = \phi(x), x \in \Omega \quad (1.2.3)$$

қарастырамыз, мұндағы $I_{0+,t}^{1-\alpha}$ мен $D_{0+,t}^{\alpha}$, сәйкесінше, реті $\alpha \in (0,1)$ болатын Риман-Лиувилль бөлшек ретті интегралы мен туындысы.

1.2.1 – анықтама (1.2.1)-(1.2.3) есебінің шешімі деп $t^{1-\alpha}u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)), t^{1-\alpha-\beta}D_{0+,t}^{\alpha}u, t^{1-\alpha}\Delta_x u \in C((0, \infty); L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

1.2.2 – теорема Айталық $\beta > 1 - \alpha$ және $\phi \in H^2(\Omega)$ болсын. Онда (1.2.1)-(1.2.3) есебінің $u(t, x)$ шешімі бар, жалғыз және келесі түрде жазылады

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x), (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (1.2.4)$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k \in \mathbb{N}$$

және $E_{\alpha, m, l}(z)$ - Килбас-Сайго функциясы (1.1.26).

1.2.2 – теореманың дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Айталық $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын делік. Сонымен қатар $\{\lambda_k > 0, k \in \mathbb{N}\}$ арқылы Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті мәндерін, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ арқылы сәйкесінше ортонормаланған меншікті функцияларын белгілейік. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ -де ортонормаланған базис болғандықтан, $u(t, x)$ және $\phi(x)$ функцияларын

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e_k(x), (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \quad (1.2.5)$$

және

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), x \in \Omega$$

арқылы жазуға болады, мұндағы $T_k(t)$ белгісіз функция және

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx.$$

(1.2.5) өрнегін (1.2.1) теңдеуіне қойып, (1.2.2) және (1.2.3) шарттарын қолданып $T_k(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебін аламыз

$$D_{0+, t}^{\alpha} T_k(t) + \lambda_k t^{\beta} T_k(t) = 0, t > 0, \quad (1.2.6)$$

$$I_{0+, t}^{1-\alpha} T_k(0) = \phi_k. \quad (1.2.7)$$

Берілген (1.2.6)-(1.2.7) есебінің жалпы шешімі [9, 227 бет] келесі түрде жазылады

$$T_k(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}). \quad (1.2.8)$$

(1.2.8)-ді (1.2.5)-ке қою арқылы (1.2.1)-(1.2.3) есебінің шешімін

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x), (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \quad (1.2.9)$$

түрінде аламыз.

Шешімнің жинақтылығы. (1.2.8) өрнегіне (1.1.28) бағалауын қолданып

$$T_k(t) \leq \frac{|\phi_k| |t^{\alpha-1}|}{\Gamma(\alpha) \left(1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_k t^{\beta+\alpha}\right)^{1+\frac{1}{m}}}, m = \frac{\beta + \alpha}{\alpha}, \alpha \in (0,1)$$

теңсіздігін аламыз. Келесі кезекте, Парсевал теңдігін пайдаланып, (1.2.9) үшін келесі нәтижені аламыз

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha} u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) \right|^2 \|e_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_k t^{\beta+\alpha}\right)^{2\left(1+\frac{1}{m}\right)}} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2 \left(1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_1 t^{\beta+\alpha}\right)^{2\left(1+\frac{1}{m}\right)}} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

$D_{0+,t}^{\alpha}$ және Δ_x операторларын (1.2.9) функциясына қолдансақ

$$\begin{aligned} D_{0+,t}^{\alpha} u(t, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k D_{0+,t}^{\alpha} \left[t^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) \right] e_k(x) \\ &= -\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

және

$$\Delta_x u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) \Delta_x e_k(x)$$

$$= -\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x) \quad (1.2.12)$$

шығады. Сәйкесінше, (1.2.10)-(1.2.12) өрнектерінен

$$\sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha-\beta} D_{0+,t}^{\alpha} u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

және

$$\sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha} \Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

бағалауларын аламыз.

Шешімнің жалғыздығы. Айталық (1.2.1) - (1.2.3) есебінің $u_1(t, x)$ және $u_2(t, x)$ екі шешімі бар болсын. Онда $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (1.2.1) теңдеуі мен (1.2.2), (1.2.3) біртекті шарттарын қанағаттандырады. Енді $T_k(t)$ арқылы келесі функцияны

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx, k \in \mathbb{N}, t > 0 \quad (1.2.13)$$

анықтайық. Онда $D_{0+,t}^{\alpha}$ операторын (1.2.13)-ке қолданып, (1.2.1) теңдеуі мен (1.2.2), (1.2.3) біртекті шарттарын ескере отырып келесі теңдікті аламыз

$$\begin{aligned} D_{0+,t}^{\alpha} T_k(t) &= \int_{\Omega} D_{0+,t}^{\alpha} u(t, x) e_k(x) dx \\ &= t^{\beta} \int_{\Omega} \Delta_x u(t, x) e_k(x) dx \\ &= t^{\beta} \int_{\Omega} u(t, x) \Delta_x e_k(x) dx \\ &= -t^{\beta} \lambda_k \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx \\ &= -t^{\beta} \lambda_k T_k(t). \end{aligned}$$

Демек, (1.2.13) функциясы (1.2.7) біртекті шартымен берілген (1.2.6) теңдеуінің шешімі болып табылады. Онда (1.2.6)-(1.2.7) есебі шешімінің жалғыздығынан

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx = 0 \quad (1.2.14)$$

шығады. Онда $\{e_k(x)\}$ жүйесінің $L^2(\Omega)$ кеңістігінде толықтығынан, (1.2.14) теңдігінен $u(t, x) \equiv 0$ екені шығады. Демек, $u_1(t, x) = u_2(t, x)$, яғни (1.2.1)-(1.2.3) есебінің шешімі жалғыз.

1.3 Риман-Лиувилль туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Нейман есебінің шешілімділігі

Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ шекарасы $\partial\Omega$ тегіс ашық шенелген облыс болсын. Бұл бөлімде келесі түрде

$$D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - t^\beta \Delta_x u(t, x) = 0, (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (1.3.1)$$

$$\partial_\nu u(t, x) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega, \quad (1.3.2)$$

$$I_{0+,t}^{1-\alpha} u(0, x) = \phi(x), x \in \Omega \quad (1.3.3)$$

берілген Коши-Нейман есебін қарастырамыз, мұндағы ν - $\partial\Omega$ шекарасындағы сыртқы нормал.

1.3.1 – анықтама (1.3.1)-(1.3.3) есебінің шешімі деп $t^{1-\alpha}u \in C((0, \infty); L^2(\Omega))$, $t^{1-\alpha-\beta} D_{0+,t}^\alpha u, t^{1-\alpha} \Delta_x u \in C((0, \infty); L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

1.3.2 – теорема Айталық $\beta > -\alpha$ және $\phi \in H^2(\Omega)$ болсын, онда (1.3.1)-(1.3.3) есебінің шешімі бар, жалғыз және

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x)$$

түрінде беріледі, мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

1.3.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Айталық $\{\lambda_k \geq 0: k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ Лаплас операторы үшін қойылған Нейман есебінің меншікті мәндері, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ сәйкесінше ортонормаланған меншікті функциялары болсын. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис болғандықтан, $u(t, x)$ және $\phi(x)$ функцияларын келесі түрде жазамыз

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) e_k(x), (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \quad (1.3.4)$$

және

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e_k(x), \quad x \in \Omega,$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Фурье коэффициенті. (1.3.4)-ді (1.3.1) теңдеуіне қойып, (1.3.2), (1.3.3) шарттарын қолданып

$$D_{0+,t}^{\alpha} T_k(t) + \lambda_k t^{\beta} T_k(t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.3.5)$$

$$I_{0+,t}^{1-\alpha} T_k(0) = \phi_k \quad (1.3.6)$$

Коши есебін аламыз. (1.3.5)-(1.3.6) Коши есебінің жалпы шешімі [9, 227 бет] келесі түрде жазылады

$$T_k(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}). \quad (1.3.7)$$

(1.3.7)-ні (1.3.4)-ке қойып, (1.3.1)-(1.3.3) шешімін

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x) \quad (1.3.8)$$

аламыз, мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx.$$

Шешімнің жинақтылығы. (1.3.7) өрнегіне (1.1.28) түрдегі Килбас-Сайго функциясының бағалауын қолданып

$$T_k(t) \leq \frac{|\phi_k| t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \left(1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_k t^{\beta+\alpha}\right)^{1+\frac{1}{m}}}, \quad m = \frac{\beta+\alpha}{\alpha}, \quad k \in [0, +\infty)$$

теңсіздігін аламыз. Парсеваль теңдігін қолданып, (1.3.8) үшін келесі

$$\sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha} u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sup_{t \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{|\Gamma(\alpha)|^2} \left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) \right|^2 \|e_k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left| 1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_k t^{\beta+\alpha} \right|^{2\left(1+\frac{1}{m}\right)}} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{\left| 1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_1 t^{\beta+\alpha} \right|^{2\left(1+\frac{1}{m}\right)}} \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

нәтиже орынды. $D_{0+,t}^\alpha$ және Δ_x операторларын (1.3.8) функциясына қолдансақ

$$\begin{aligned}
D_{0+,t}^\alpha u(t, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k D_{0+,t}^\alpha \left[t^{\alpha-1} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) \right] e_k(x) \\
&= -\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x)
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

және

$$\begin{aligned}
\Delta_x u(t, x) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) \Delta_x e_k(x) \\
&= -\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x)
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

шығады. (1.3.9)- (1.3.11) өрнектерінен

$$\sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha-\beta} D_{0+,t}^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

және

$$\sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha} \Delta_x u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

бағалауларын аламыз.

Шешімнің жалғыздығы. Шешімнің жалғыздығын алдыңғы теоремадағы әдісті қолданып дәлелдейміз.

1.4 Риман-Лиувилль туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешілімділігі

Бұл бөлімде, келесі түрде берілген Коши есебін

$$D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - t^\beta \Delta_x u(t, x) = 0, (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (1.4.1)$$

$$I_{0+,t}^{1-\alpha} u(0, x) = \phi(x), x \in \mathbb{R}^N \quad (1.4.2)$$

зерттейміз. Айталық, $H^2(\mathbb{R}^N)$

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \xi^2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

нормасымен анықталған келесі Гильберт кеңістігі

$$H^2(\mathbb{R}^N) = \{u: u \in L^2(\mathbb{R}^N); \Delta_x u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

болсын. Мұндағы $\hat{f}(\xi)$ Фурье түрлендіруі.

1.4.1 – анықтама (1.4.1)-(1.4.2) есебінің шешімі деп $t^{1-\alpha-\beta} D_{0+,t}^\alpha u, t^{1-\alpha} \Delta_x u \in C((0, \infty); L^2(\mathbb{R}^N)), t^{1-\alpha} u \in C([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^N))$ функциясын айтамыз.

1.4.2 – теорема Айталық, $\beta > 1 - \alpha$ және $\phi \in H^2(\mathbb{R}^N)$ болсын. Онда (1.4.1)-(1.4.2) есептің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) d\xi$$

анықталады, мұндағы

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-is\xi} \phi(s) ds.$$

Сонымен қатар, $u(t, x)$ шешімі келесі

$$\sup_{t \geq 0} t^{1-\alpha} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t \geq 0} t^{1-\alpha-\beta} \|D_{0+,t}^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t \geq 0} t^{1-\alpha} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}$$

бағалауларды қанағаттандырады.

1.4.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. (1.4.1)-(1.4.2) есебіне Фурье түрлендіруін қолданып, келесі

$$D_{0+,t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) + |\xi|^2 t^\beta \hat{u}(t, \xi) = 0, (t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (1.4.3)$$

$$I_{0+,t}^{1-\alpha} \hat{u}(0, \xi) = \hat{\phi}(\xi) \quad (1.4.4)$$

есепті аламыз. (1.4.3)-(1.4.4) есептің шешімі [9, 227 бет] келесі өрнекпен анықталады

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\phi}(\xi) t^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}). \quad (1.4.5)$$

(1.4.5)-ке кері Фурье түрлендіруін қолданып, (1.4.1)-(1.4.2) есептің шешімін аламыз

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) d\xi.$$

Шешімнің жинақтылығы. (1.1.28) бағалауы мен Планшерель теоремасын қолданып келесіні аламыз

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^N} |t^{1-\alpha} u(t, x)|^2 dx &= \sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^N} |t^{1-\alpha} \hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right|^2 d\xi \\ &\leq \| \hat{\phi} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \| \phi(\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

$D_{0+,t}^\alpha$ операторын $u(t, x)$ функциясына қолдану арқылы

$$\begin{aligned} D_{0+,t}^\alpha u(t, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) D_{0+,t}^\alpha \left[t^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right] d\xi \\ &= -\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) |\xi|^2 E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) d\xi \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. Демек,

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha-\beta} D_{0+,t}^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\
& \leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right|^2 d\xi \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Сол сияқты, Δ_x операторы үшін

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \geq 0} \|t^{1-\alpha} \Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\
& \leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right|^2 d\xi \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

теңсіздігі орынды.

Шешімнің жалғыздығы. $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (1.4.1) - (1.4.2) Коши есебінің шешімі болсын делік. Онда $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (1.4.1) мен біртекті шартты (1.4.2) қанағаттандырады. Келесі функцияны

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx \quad (1.4.6)$$

қарастырайық. (1.4.1) теңдеуін ескеріп, $D_{0+,t}^\alpha$ операторын (1.4.6) өрнегіне қолдансақ,

$$\begin{aligned}
D_{0+,t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} D_{0+,t}^\alpha u(t, x) dx \\
&= -t^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \Delta_x u(t, x) dx = -t^\beta \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 \hat{u}(t, x))] \\
&= -t^\beta |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi)
\end{aligned}$$

шығады. (1.4.4)-ден

$$I_{0+,t}^{1-\alpha} \hat{u}(0, \xi) = 0$$

екендігін аламыз. Онда (1.4.5) өрнегінен $\hat{u}(t, \xi) = 0$ шығады, яғни

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx = 0.$$

Соңғы өрнекке кері Фурье түрлендіруін қолдану арқылы $u(t, x) \equiv 0$ аламыз, яғни $u_1(t, x) = u_2(t, x)$. Демек, (1.4.1)-(1.4.2) есебінің шешімі жалғыз.

2 КАПУТО БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФФУЗИЯ ТЕНДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР

2.1 Капуто туындысы қатысқан диффузия тендеуі үшін Коши-Дирихле есебі шешімінің кейбір қасиеттері

Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ шекарасы $\partial\Omega$ тегіс ашық шенелген облыс болсын. Келесі түрде берілген диффузия тендеуін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t,x) - t^\beta \Delta_x u(t,x) = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (2.1.1)$$

Дирихле шеттік шартымен

$$u(t,x) = 0, x \in \partial\Omega \quad (2.1.2)$$

және Коши бастапқы шартымен

$$u(0,x) = \phi(x), x \in \Omega \quad (2.1.3)$$

қарастырамыз, мұндағы $\beta > -\alpha$ және ${}^c D_{0+,t}^\alpha$ - реті $\alpha \in (0,1)$ болатын t айнымалысы бойынша бөлшек ретті Капуто туындысы (1.1.12 – анықтама).

2.1.1 – анықтама (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімі деп $u \in C([0, \infty); L^2(\Omega))$, $t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u, \Delta_x u \in C((0, \infty); L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

2.1.2 – теорема Айталық, $\alpha \in (0,1), \beta > -\alpha$ және $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын, онда (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімі $u \in C([0, \infty); L^2(\Omega))$, $t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u, \Delta_x u \in C((0, \infty); L^2(\Omega))$ бар, жалғыз және

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x) \quad (2.1.4)$$

арқылы анықталады, мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx,$$

$E_{\alpha, m, l}(z)$ – Килбас-Сайго функциясы (1.1.26), (1.1.27) формулаларымен берілген.

Сонымен қатар (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімі $u(t,x)$ үшін келесі екі жақты бағалау орынды

$$\frac{m_1}{1 + \lambda_1 t^{\beta+\alpha}} \leq \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1}{1 + \lambda_1 t^{\beta+\alpha}},$$

мұндағы m_1, M_1 оң тұрақтылар.

2.1.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Айталық $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын делік. Сонымен қатар $\{\lambda_k > 0, k \in \mathbb{N}\}$ арқылы Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті мәндерін, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ арқылы сәйкесінше ортонормаланған меншікті функцияларын белгілейік. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ -де ортонормаланған базис болғандықтан, $u(t, x)$ және $\phi(x)$ функцияларын

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e_k(x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \quad (2.1.5)$$

және

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), \quad x \in \Omega$$

түрінде жазуға болады, мұндағы $T_k(t)$ белгісіз функция және

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx.$$

(2.1.5) өрнегін (2.1.1)-(2.1.3) есебіне қолданып $T_k(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебін аламыз

$${}^c D_{0+,t}^{\alpha} T_k(t) + \lambda_k t^{\beta} T_k(t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.1.6)$$

$$T_k(0) = \phi_k. \quad (2.1.7)$$

(2.1.6)-(2.1.7) Коши есебінің жалпы шешімі [9, 233 бет]

$$T_k(t) = \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}), \quad (2.1.8)$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx.$$

Онда (2.1.8)-ді (2.1.5)-ке қойып, (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімін

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x) \quad (2.1.9)$$

табамыз.

Шешімнің жинақтылығы. Килбас-Сайго функциясының (1.1.27) бағалауынан (2.1.8) $T_k(t)$ функциясы үшін келесі

$$T_k(t) \leq \frac{|\phi_k|}{1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_k t^{\beta + \alpha}}$$

бағалауына ие боламыз.

Парсевал теңдігінің көмегімен

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sup_{t \geq 0} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_k t^{\beta + \alpha}\right)^2} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_1 t^{\beta + \alpha}\right)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

теңсіздігін аламыз.

(2.1.4) арқылы анықталған $u(t, x)$ функциясына ${}^c D_{0+, t}^{\alpha}$ және Δ_x операторларын қолдану арқылы

$$\begin{aligned} {}^c D_{0+, t}^{\alpha} u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k {}^c D_{0+, t}^{\alpha} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x) \\ &= -t^{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x) \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

және

$$\begin{aligned} \Delta_x u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) \Delta_x e_k(x) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

теңдіктерін аламыз. Келесі кезекте, (2.1.10)-(2.1.12) негізге ала отырып

$$\sup_{t \geq 0} \|t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

және

$$\sup_{t \geq 0} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

теңсіздіктеріне ие боламыз.

Шешімнің жалғыздығы. Айталық (2.1.1)-(2.1.3) есебінің $u_1(t, x)$ және $u_2(t, x)$ екі шешімдері болсын, онда $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (2.1.1) теңдеуін, (2.1.2), (2.1.3) біртекті шарттарын қанағаттандырады. Келесі функцияны

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx, k \in N, t \geq 0 \quad (2.1.13)$$

қарастырайық. (2.1.13)-ге ${}^c D_{0+,t}^\alpha$ операторын қолданып, (2.1.1) көмегімен

$$\begin{aligned} {}^c D_{0+,t}^\alpha T_k(t) &= \int_{\Omega} {}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) e_k(x) dx \\ &= t^\beta \int_{\Omega} \Delta_x u(t, x) e_k(x) dx \\ &= t^\beta \int_{\Omega} u(t, x) \Delta_x e_k(x) dx \\ &= -t^\beta \lambda_k \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx \\ &= -t^\beta \lambda_k T_k(t), k \in N \end{aligned}$$

аламыз. (2.1.3) шарттарынан

$$T_k(0) = 0$$

шығады. Онда $T_k(t) = 0$, сәйкесінше $u(t, x) \equiv 0$. Демек, $u_1(t, x) = u_2(t, x)$, осымен (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімінің жалғыздығы дәлелденеді.

Шешімнің оптималды бағалауы.

Парсевал теңдігін қолданып келесі бағалауды аламыз

$$\begin{aligned}
 \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\alpha+\beta}) \right|^2 \|e_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \lambda_k t^{\alpha+\beta}\right)^2} \\
 &\leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \lambda_1 t^{\alpha+\beta}\right)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \\
 &\leq \frac{M_1^2}{(1 + \lambda_1 t^{\alpha+\beta})^2},
 \end{aligned}$$

яғни

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1}{1 + \lambda_1 t^{\alpha+\beta}}.$$

Енді $u(t, x)$ шешімнің төменгі бағалауын дәлелдейміз. Осы ретте, Парсевал теңдігін пайдаланып аламыз

$$\begin{aligned}
 \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\alpha+\beta}) \right|^2 \|e_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{(1 + \Gamma(1-\alpha) \lambda_k t^{\alpha+\beta})^2} \\
 &= \frac{|\phi_1|^2}{(1 + \Gamma(1-\alpha) \lambda_1 t^{\alpha+\beta})^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{(1 + \Gamma(1-\alpha) \lambda_k t^{\alpha+\beta})^2} \\
 &\geq \frac{m_1^2}{(1 + \lambda_1 t^{\alpha+\beta})^2}.
 \end{aligned}$$

2.2 Капуто туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Нейман есебінің шешілімділігі

Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ шекарасы $\partial\Omega$ тегіс ашық шенелген облыс болсын. Бұл бөлімде келесі түрде берілген бөлшек ретті диффузия теңдеуін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t,x) - t^\beta \Delta_x u(t,x) = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (2.2.1)$$

Нейман шеттік шартымен

$$\partial_\nu u(t,x) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega \quad (2.2.2)$$

және бастапқы шартымен

$$u(0,x) = \phi(x), x \in \Omega \quad (2.2.3)$$

қарастырамыз, мұндағы ${}^c D_{0+,t}^\alpha$ бөлшек ретті Капуто туындысы және $\beta > -\alpha$.

2.2.1 – анықтама (2.2.1)-(2.2.3) есебінің шешімі деп $u(t,x) \in C([0,\infty); L^2(\Omega)), t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u, \Delta_x u \in C((0,\infty); L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

2.2.2 – теорема Айталық, $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын, онда (2.2.1)-(2.2.3) есебінің шешімі бар, жалғыз және

$$u(t,x) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x) \quad (2.2.4)$$

түрінде беріледі, мұндағы

$$\phi_0 = \int_{\Omega} \phi(x) dx, \phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k \in \mathbb{N}$$

және $E_{\alpha,m,l}(z)$ - Килбас-Сайго функциясы.

2.2.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Айталық $\{\lambda_k \geq 0, k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ Лаплас операторы үшін қойылған Нейман есебінің меншікті мәндері, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ сәйкесінше ортонормаланған меншікті функциялары болсын. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ және $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын, онда (2.2.1)-(2.2.3) есебінің шешімін

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) e_k(x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (2.2.5)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e_k(x)$$

түрінде жаза аламыз, мұндағы $T_k(t)$ белгісіз функция және

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k = 0, 1, 2, \dots$$

(2.2.5) теңдікті (2.2.1)-(2.2.3) есебіне қолданып

$${}^c D_{0+,t}^{\alpha} T_k(t) + \lambda_k t^{\beta} T_k(t) = 0, \quad (2.2.6)$$

$$T_k(0) = \phi_k \quad (2.2.7)$$

Коши есебін аламыз. (2.2.6)-(2.2.7) есебінің жалпы шешімі [9, 233 бет]

$$T_k(t) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}), \quad (2.2.8)$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k = 0, 1, 2, \dots$$

(2.2.8) өрнегін (2.2.5) –ге қойып, (2.2.1)-(2.2.3) есебінің шешімін

$$u(t, x) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) e_k(x) \quad (2.2.9)$$

түрінде аламыз.

Шешімнің жинақтылығы. (1.1.27) бағалауын (2.2.8) өрнегіне қолданып

$$T_k(t) \leq |\phi_0| + \frac{|\phi_k|}{1 + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \lambda_k t^{\beta+\alpha}}$$

теңсіздігін аламыз. Парсеваль теңдігін қолданып, (2.2.9) өрнегінен

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sup_{t \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta+\alpha}) \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \lambda_k t^{\beta+\alpha}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_1 t^{\beta + \alpha}\right)^2} \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.2.10)$$

нәтиже орынды. ${}^c D_{0+,t}^\alpha$ және Δ_x операторларын (2.2.9) функциясына қолдансақ

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k {}^c D_{0+,t}^\alpha E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x)$$

$$= -t^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x) \quad (2.2.11)$$

және

$$\Delta_x u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) \Delta_x e_k(x)$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x) \quad (2.2.12)$$

шығады. (2.2.11)-(2.2.12) теңдіктерінен

$$\sup_{t \geq 0} \|t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

және

$$\sup_{t \geq 0} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

бағалауларын аламыз.

Шешімнің жалғыздығы. Жалғыздығын 2.1.2 теоремадағы әдісті пайдаланып дәлелдейміз.

Шешімнің оптималды бағалауы.

Лаплас операторы үшін Нейман есебінің бірінші меншікті мәні нөлге тең екендігі белгілі. Айталық $\phi_0 = \int_{\Omega} \phi_k(x) dx = 0$ болсын. Онда (2.2.9) келесі түрде жазылады

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\beta + \alpha}) e_k(x).$$

Парсевал теңдігін және (1.1.27) бағалауынан қолданып 2.1.2 – теоремасының дәлелдеу жолын қайталап

$$\frac{c}{1 + \lambda_1^N t^{\alpha + \beta}} \leq \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c}{1 + \lambda_1^N t^{\alpha + \beta}}, t \geq 0 \quad (2.2.13)$$

алуға болады, мұндағы $C, c > 0$ оң тұрақтылары, ал $\lambda_1^N > 0$ Лаплас операторы үшін Нейман есебінің бірінші нөлдік емес меншікті мәні. Ұқсас пайымдаулар,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s e_k(x) = \lambda_k e_k(x), x \in \Omega, \\ \mathcal{N}_s e_k(x) = 0, \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

бейлокал Нейман шарты бар бөлшек ретті Лаплас операторы үшін де орынды, мұндағы $\mathcal{N}_s$ келесі бейлокал нормал туынды

$$\mathcal{N}_s e_k = c_{n,s} \int_{\Omega} \frac{e_k(x) - e_k(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy,$$

мұндағы $c_{n,s}$ нормалау тұрақтысы. Айта кету керек, [52] жоғарыда келтірілген бейлокал Лаплас операторы үшін Нейман есебінің $L^2(\Omega)$ -де ортогоналды базис құрайтын меншікті функциялары бар және сәйкес меншікті мәндері теріс емес екендігі

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

дәлелденген.

2.3 Капуто туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешілімділігі

Бұл бөлімде толық $\mathbb{R}^N$ -де берілген келесі Коши есебін

$${}^c D_{0+,t}^{\alpha} u(t, x) - t^{\beta} \Delta_x u(t, x) = 0, (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (2.3.1)$$

$$u(0, x) = \phi(x), x \in \mathbb{R}^N \quad (2.3.2)$$

қарастырамыз, мұндағы $\beta > -\alpha$ және ${}^c D_{0+,t}^{\alpha}, \alpha \in (0, 1)$ бөлшек ретті Капуто туындысы. Айталық, $H^2(\mathbb{R}^N)$

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

нормасымен анықталған Гильберт-Соболев кеңістігі

$$H^2(\mathbb{R}^N) = \{u: u \in L^2(\mathbb{R}^N); \Delta_x u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

болсын. Мұндағы $\hat{f}(\xi)$ Фурье түрлендіруі.

2.3.1 – анықтама (2.3.1) - (2.3.2) Коши есебінің шешімі деп $u \in C([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^N))$, $t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u, \Delta_x u \in C((0, \infty); L^2(\mathbb{R}^N))$ функциясын айтамыз.

2.3.2 – теорема Айталық, $\phi \in H^2(\mathbb{R}^N)$ болсын, онда (2.3.1)-(2.3.2) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) d\xi, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \quad (2.3.3)$$

анықталады, мұндағы

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-is\xi} \phi(s) ds$$

және $E_{\alpha, m, l}(z)$ - Килбас-Сайго функциясы. Сонымен қатар, $u(t, x)$ шешімі келесі

$$\|u(t, \cdot)\|_{C([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^N))} \leq \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} \|t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}$$

бағалауларды қанағаттандырады.

2.3.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. (2.3.1)-(2.3.2) есебіне Фурье түрлендіруін қолданып, төмендегі

$${}^c D_{0+,t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) + \xi^2 t^\beta \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (2.3.4)$$

$$\hat{u}(0, \xi) = \hat{\phi}(\xi) \quad (2.3.5)$$

есепті аламыз. (2.3.4)-(2.3.5) есебінің шешімі [9, 233 бет]

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \quad (2.3.6)$$

өрнекпен анықталады.

(2.3.6) теңдігіне кері Фурье түрлендіруін қолданып, (2.3.1)-(2.3.2) есептің шешімін аламыз

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) d\xi.$$

Шешімнің жинақтылығы. (1.1.27) бағалауы мен Планшерель теоремасын қолданып келесіні аламыз

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x)|^2 dx &= \sup_{t \in (0, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{t \in (0, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right|^2 d\xi \\ &\leq \|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

${}^c D_{0+,t}^\alpha$ операторын $u(t, x)$ функциясына қолдану арқылы

$$\begin{aligned} {}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) {}^c D_{0+,t}^\alpha \left[E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right] d\xi. \\ &= -t^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) |\xi|^2 E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) d\xi \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. Демек,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, +\infty)} \|t^{-\beta} {}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ \leq \sup_{t \in (0, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right|^2 d\xi \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Дәл осылай, Δ_x операторы үшін

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in (0, +\infty)} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\
& \leq \sup_{t \in (0, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}}(-|\xi|^2 t^{\beta+\alpha}) \right|^2 d\xi \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} ||\xi|^2 \hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2
\end{aligned}$$

теңсіздігі орынды.

Шешімнің жалғыздығы. $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (2.3.1)-(2.3.2) Коши есебінің шешімі болсын делік. Онда $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (2.3.1) мен (2.3.2) біртекті шартты қанағаттандырады. Келесі функцияны

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N \quad (2.3.7)$$

карастырайық. (2.3.1) теңдеуін ескере отырып, ${}^c D_{0+,t}^\alpha$ операторын (2.3.7) өрнегіне қолдансақ,

$$\begin{aligned}
{}^c D_{0+,t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} {}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) dx \\
&= t^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \Delta_x u(t, x) dx = -t^\beta \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 \hat{u}(t, x))] \\
&= -t^\beta |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi), \quad t > 0
\end{aligned}$$

шығады. Бастапқы шарт (2.3.5) бойынша

$$\hat{u}(0, \xi) = 0$$

шығады. Сәйкесінше, (2.3.6) теңдігінен, $\hat{u}(t, \xi) = 0, t > 0, \xi \in \mathbb{R}^N$ болады. Демек,

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx = 0.$$

Онда Фурье кері түрлендіруін қолданып, $u(t, x) \equiv 0$ аламыз, осыдан шешімнің жалғыздығы шығады $u_1(t, x) = u_2(t, x)$.

2.4 Капуто туындысы қатысқан квазисызықты диффузия тендеулері үшін Коши-Дирихле есебі шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары

Бұл бөлімде келесі түрде берілген тендеуін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - a(t) \mathcal{A}(u(t, x)) = 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega := \Omega_+, \quad (2.4.1)$$

Коши бастапқы шартымен

$$u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega \quad (2.4.2)$$

және Дирихле шеттік шартымен

$$u(t, x) = 0, t \geq 0, x \in \partial\Omega \quad (2.4.3)$$

қарастырамыз. Мұндағы $0 < \alpha < 1$, $a(t) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ шекарасы $\partial\Omega$ тегіс, шенелген облыс, және ${}^c D_{0+,t}^\alpha$ Капуто бөлшек ретті туындысы [9, б. 97] және $\mathcal{A}(u)$ келесі бейсызықты операторларының бірі:

- p -Лаплас операторы:

$$\mathcal{A}(u) := \Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u);$$

- Кеукті орта операторы:

$$\mathcal{A}(u) := \nabla(g(u) \nabla u);$$

- Өзгешеленген эллипстік операторы:

$$\mathcal{A}(u) := f(u) \Delta u;$$

- Орташа қисықтық операторы:

$$\mathcal{A}(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right);$$

- Киргхов операторы:

$$\mathcal{A}(u) := M(\|\nabla u\|_{L^q}) \Delta u.$$

Барлық жағдайларда $a(t)$ функциясы келесі шартты қанағаттандырсын деп болжаймыз

$$(H): a(t) \geq \kappa t^\beta, \beta > -\alpha, \kappa > 0.$$

Қарастырылып отырған квазисызықты есептердің шешімдерінің бар болуы жалпы жағдайда Р.Захердің [27] еңбегінде зерттелген.

2.4.1 Жартылай сызықты бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі шешімінің қасиеттері

Бұл бөлімде, біз жартылай квазисызықты теңдеуді

$${}^c D_{0+,t}^\alpha H(t) + \nu t^\beta H^\delta(t) = 0, t > 0, \nu > 0, \delta > 0 \quad (2.4.4)$$

қарастырамыз.

2.4.1 – лемма Айталық, $\alpha \in (0,1), \beta > -\alpha, \delta > 0$ және $\nu > 0, H(0) = H_0 > 0$ болсын, сондай ақ $H \in C(\mathbb{R}_+)$ функциясы (2.4.4) теңдеуінің шешімі болсын. Онда $H(t)$ функциясы үшін, келесі екі жақты бағалау орынды:

$$\frac{c_1}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}}} \leq H(t) \leq \frac{c_2}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}, c_1, c_2 > 0, t \geq 0. \quad (2.4.5)$$

2.4.1 – леммасының дәлелдеуі. (2.4.5) теңдеуінің шешімінің бағалауын суб және супер шешімдер әдісі арқылы дәлелейміз. Келесі функцияларды қарастырайық

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} H_0 - \nu \Gamma(1-\alpha) H_0^\delta t^{\alpha+\beta}, & t \in [0, t_1], \\ \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu \Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{\delta}} 2^{-1} H_0 t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}, & t \geq t_1 \end{cases}$$

және

$$\tilde{H}(t) = \begin{cases} H_0, & t \in [0, t_2], \\ H_0 t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}, & t \geq t_2, \end{cases}$$

мұндағы

$$t_1 = \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu \Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

және

$$t_2 = \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{\nu} \left(\frac{2^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha+\beta}{\delta} \frac{2^{\alpha+\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

[30, 7 - бөлім] сияқты есептеулерді жүргізіп, $\tilde{H}(t)$ функциясы (2.4.5) теңдеуінің супер шешімі, ал $\hat{H}(t)$ бастапқы шарттар мен $H(0) = H_0$ берілген суб шешімі болатынын дәлелдеп көрсетеміз.

Келесі функцияны қарастырайық

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} H_0 - \nu\Gamma(1-\alpha)H_0^\delta t^{\alpha+\beta}, & t \in [0, t_1], \\ \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{\delta}} 2^{-1} H_0 t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}, & t \geq t_1, \end{cases}$$

мұндағы

$$t_1 = \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

$\hat{H}$ функциясы $\hat{H}(t) \in H_{1,loc}^1(R_+)$, $\hat{H}(0) = H_0$, $\hat{H}(t_1) = H_0/2$ және $t \geq 0$ үшін $\hat{H}(t) > 0$. Онда

$$\begin{aligned} {}^c D_{0+,t}^\alpha t^{\alpha+\beta} &= \frac{\alpha+\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha+\beta-1}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = |\tau = t\xi| \\ &= \frac{\alpha+\beta}{\Gamma(1-\alpha)} t^\beta \int_0^1 \xi^{\alpha+\beta-1} (1-\xi)^{-\alpha} d\xi \\ &= t^\beta \frac{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\beta)} = t^\beta \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\beta)}. \end{aligned}$$

$t \in (0, t_1)$ аралығында

$$\begin{aligned} & {}^c D_{0+,t}^\alpha \hat{H}(t) + \nu t^\beta \hat{H}^\delta(t) \\ &= {}^c D_{0+,t}^\alpha (H_0 - \nu\Gamma(1-\alpha)H_0^\delta t^{\alpha+\beta}) + \nu t^\beta (H_0 - \nu\Gamma(1-\alpha)H_0^\delta t^{\alpha+\beta})^\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nu\Gamma(1-\alpha)H_0^\delta {}^cD_{0+,t}^\alpha t^{\alpha+\beta} + \nu t^\beta (H_0 - \nu\Gamma(1-\alpha)H_0^\delta t^{\alpha+\beta})^\delta \\
&= -\frac{\nu\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\beta)H_0^\delta t^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \nu t^\beta H_0^\delta \\
&= -t^\beta \frac{\nu\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\beta)H_0^\delta}{\Gamma(1+\beta)} \left(1 - \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\beta)}\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

$t > t_1$ үшін $\hat{H}'(t) \leq 0$ қолданып келесіні аламыз

$$\begin{aligned}
{}^cD_{0+,t}^\alpha \hat{H}(t) &= \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} 2^{-1} H_0 {}^cD_{0+,t}^\alpha t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \\
&= \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_0}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{\partial \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \\
&= -\left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_0}{2\Gamma(1-\alpha)} \frac{\alpha+\beta}{\delta} \int_{t_1}^t \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&\leq \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_0}{2\Gamma(1-\alpha)} \frac{\alpha+\beta}{\delta} \int_0^t \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&\quad - \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_0}{2\Gamma(1-\alpha)} \frac{\alpha+\beta}{\delta} \int_{t_1}^t \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&= \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_0}{2\Gamma(1-\alpha)} \frac{\alpha+\beta}{\delta} \int_0^{t_1} \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&\leq \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_0 t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} \frac{\alpha+\beta}{\delta} \int_0^{t_1} \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} d\tau \\
&\quad - \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_0 t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} t_1^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} = -\frac{H_0 t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Сонымен қатар,

$$\begin{aligned}
& {}^c D_{0+,t}^\alpha \hat{H}(t) + \nu t^\beta \hat{H}^\delta(t) \\
& \leq -\frac{H_0 t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} + \nu t^\beta \left(\left(\frac{H_0^{1-\delta}}{2\nu\Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{\delta}} 2^{-1} H_0 t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \right)^\delta \\
& = -\frac{H_0 t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} + \frac{H_0^{1-\delta}}{2\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{H_0}{2} \right)^\delta t^{-\alpha} \\
& = -\frac{H_0 t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} + \frac{H_0 t^{-\alpha}}{2^{1+\delta}\Gamma(1-\alpha)} \\
& = -\frac{H_0 t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} \left(1 - \frac{1}{2^\delta} \right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Демек, $\hat{H}$ функциясы (2.4.4) есебінің суб шешімі. Айталық $t_2 > 0$ келесідей

$$t_2 = \left(\frac{H_0^{1-\delta}}{\nu} \left(\frac{2^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha+\beta}{\delta} \frac{2^{\alpha+\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

анықталсын. Келесі функцияны қарастырамыз

$$\tilde{H}(t) = \begin{cases} H_0, & t \in [0, t_2], \\ H_0 t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}, & t \geq t_2. \end{cases}$$

Онда $t < t_2$ үшін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha \tilde{H}(t) + \nu t^\beta \tilde{H}^\delta(t) = \nu t^\beta \tilde{H}^\delta \geq 0,$$

ал $t > t_2$ үшін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha \tilde{H}(t) = H_0 t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} {}^c D_{0+,t}^\alpha t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{H_0 t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_2}^t \frac{\partial \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \\
&= -\frac{H_0 t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} (\alpha+\beta)}{\delta \Gamma(1-\alpha)} \int_{t_2}^t \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau.
\end{aligned}$$

$t \in [t_2, 2t_2]$ үшін t_2 -нің түрін қолданып, келесі бағалауды

$$\begin{aligned}
{}^c D_{0+,t}^\alpha \tilde{H}(t) &= H_0 t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} {}^c D_{0+,t}^\alpha t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \\
&= t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{H_0}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_2}^{2t_2} \frac{\partial \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \\
&= -t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta \Gamma(1-\alpha)} \int_{t_2}^{2t_2} \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&\geq -\frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta \Gamma(1-\alpha)} t_2^{-1} \int_{t_2}^{2t_2} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&\geq -\frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta \Gamma(1-\alpha)} t_2^{-1} \frac{t_2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&= -\frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta \Gamma(2-\alpha)} t_2^{-\alpha} \geq -\frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta \Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} \\
&= -\nu 2^\alpha \tilde{H}^\delta(t) t^\beta \frac{H_0^{1-\delta}(\alpha+\beta)}{\nu \delta \Gamma(2-\alpha) t_2^{\alpha+\beta}} \geq -\nu t^\beta \tilde{H}^\delta(t)
\end{aligned}$$

аламыз. Ал, $t > 2t_2$ үшін

$$\begin{aligned}
{}^c D_{0+,t}^\alpha \tilde{H}(t) &= H_0 t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} {}^c D_{0+,t}^\alpha t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \\
&= t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{H_0}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_2}^t \frac{\partial \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_2}^t \tau^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau = |\tau = t\xi| \\
&= -t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta\Gamma(1-\alpha)} t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-\alpha} \int_{\frac{t_2}{t}}^1 \xi^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (1-\xi)^{-\alpha} d\xi \\
&= -t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta\Gamma(1-\alpha)} t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-\alpha} \left[\int_{t_2/t}^{1/2} \xi^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (1-\xi)^{-\alpha} d\xi + \int_{1/2}^1 \xi^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} (1-\xi)^{-\alpha} d\xi \right] \\
&\geq -t_2^{\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta\Gamma(1-\alpha)} t^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-\alpha} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} \cdot \int_{t_2/t}^{1/2} \xi^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} d\xi + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-1} \int_{1/2}^1 (1-\xi)^{-\alpha} d\xi \right] \\
&= -t_2^{-\alpha} \frac{H_0(\alpha+\beta)}{\delta\Gamma(1-\alpha)} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} \cdot \frac{\delta}{\alpha+\beta} \left(\frac{t_2}{t}\right)^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\alpha+\beta}{\delta}-\alpha} \frac{1}{1-\alpha} \right] \\
&\geq -\frac{\nu \tilde{H}^\delta(t) H_0^{1-\delta} t_2^\beta}{\nu t_2^{\alpha+\beta}} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + 2^{\alpha+\frac{\alpha+\beta}{\delta}} \frac{\alpha+\beta}{\delta\Gamma(2-\alpha)} \right] = -\nu t^\beta \tilde{H}^\delta(t).
\end{aligned}$$

Онда $\tilde{H}(t)$ функциясы (2.4.4) есебінің супер шешімі. Дәлелдеу аяқталды.

2.4.2 Жалпыланған айнымалы коэффициентті субдиффузия теңдеуі

Бұл бөлімшеде біз (2.1.1) диффузиялық теңдеудің жалпы жағдайын қарастырамыз, яғни

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t,x) - a(t)\Delta u(t,x) = 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega := \Omega_+, \quad (2.4.6)$$

мұндағы $a(t)$ теріс емес функция. (2.4.6), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің әлсіз локалды шешімінің бар болуы мен жалғыздығы [27]-те алынғанын еске саламыз. Бұл бөлімшенің негізгі нәтижесі келесі тұжырым болып табылады.

2.4.2 – теорема (2.4.6), (2.4.2), (2.4.3) есебінің шешімі $u(t,x)$ бар болсын. $u_0 \in L^2(\Omega)$ және $a(t)$ функциясы (H) тұжырымын қанағаттандырады делік. Онда (2.4.6), (2.4.2), (2.4.3) есептің $u(t,x)$ шешімінің бағалауы келесі түрде

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+\lambda_1 \kappa t^{\alpha+\beta}}, t \geq 0 \quad (2.4.7)$$

болады, мұндағы M оң тұрақты.

2.4.3 – ескерту Егер $a(t)$ функциясы төмендегідей шектелген болса

$$0 < a(t) \leq \kappa_1 t^\beta, \kappa_1 > 0, t > 0,$$

онда $u(t, x)$ шешімнің бағалауы оптималды болады. Шынында да, келесі функцияны

$$v(t, x) = T(t)e_1(x)$$

қарастырайық, мұндағы $e_1(x)$ Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің бірінші меншікті функциясы. Осыдан

$$0 = {}^c D_{0+,t}^\alpha T(t) + \lambda_1 a(t)T(t)$$

$$\leq {}^c D_{0+,t}^\alpha T(t) + \lambda_1 \kappa_1 t^\beta T(t),$$

онда v функциясы (2.4.6), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің субшешімі болады, бұдан

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{m}{1 + \lambda_1 \kappa t^{\alpha+\beta}}, 0 < m < M.$$

2.4.2 – теоремасының дәлелдеуі. (2.4.6) теңдеуінің әрбір мүшесін $u(t, x)$ -ға көбейтіп, содан кейін Ω бойынша интегралдаймыз

$$\int_{\Omega} u [{}^c D_{0+,t}^\alpha u] dx - a(t) \int_{\Omega} u \Delta u dx = 0.$$

Келесі теңсіздікті пайдаланып ([30] қараңыз)

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} {}^c D_{0+,t}^\alpha (\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}) \leq \int_{\Omega} u(t, \cdot) [{}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, \cdot)] dx \quad (2.4.8)$$

және теңдіктің соңғы бөлігін бөліктеп интегралдасақ, біз келесі тұжырымға

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} {}^c D_{0+,t}^\alpha (\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}) + a(t) \int_{\Omega} |\nabla u(t, \cdot)|^2 dx \leq 0$$

келеміз. Енді, (H) шартын ескере отырып және Пуанкаре теңсіздігінен

$${}^c D_{0+,t}^\alpha (\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}) + \lambda_1 \kappa t^\beta \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

аламыз.

Бұл (2.4.6)-нің шешімі (2.1.1) теңдеудің супер шешімі болатындығын көрсетеді. Онда (2.4.7) орынды.

2.4.4 - ескерту Сол сияқты келесі жалпы квазисызықты операторды қарастыруға болады

$$\mathcal{A}(u) := \operatorname{div}(A(t, x, u, \nabla u)),$$

мұндағы $A(t, x, u, v)$ операторы

$$(A(t, x, u, v), v) \geq \kappa(v, v), \kappa > 0$$

қанағаттандырады.

Жоғарыдағы әдісті қайталай отырып, төменде берілген теңдеудің шешімі

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - a(t) \operatorname{div}(A(t, x, u, \nabla u)) = 0, (t, x) \in \Omega_+,$$

келесі бағалауды қанағаттандыратынын

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{1 + t^{\alpha+\beta}}, t \geq 0,$$

табуға болады, мұндағы C оң тұрақты шама.

2.4.3 p -Лапласты субдиффузия теңдеуі

Бұл бөлімшеде келесі p -Лапласты субдиффузия теңдеуін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - a(t) \Delta_p u(t, x) = 0, (t, x) \in \Omega_+ \quad (2.4.9)$$

қарастырамыз. Мұндағы

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

p -Лаплас операторы.

Осы бөлімшедегі нәтижемізді дәлелдеу үшін [30] жұмыста дәлелденген келесі

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} {}^c D_{0+,t}^\alpha (\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}) \leq \int_{\Omega} u [{}^c D_{0+,t}^\alpha u] dx \quad (2.4.10)$$

теңсіздікті қолданамыз.

Жалпы алғанда, (2.4.9), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің $u(t, x)$ әлсіз локалды шешімінің бар болуы мен жалғыздығы [26] жұмыста Галеркиннің жуықтау

әдісінің көмегімен алынған. Келесі кезекте, біз үлкен t үшін шешімнің бағалауын зерттейміз.

2.4.5 – теорема Айталық $u(t, x)$ функциясы (2.4.9), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің шешімі болсын және $a(t)$ функциясы (H) тұжырымын қанағаттандырсын. Сондай ақ $\frac{2n}{n+2} \leq p < \infty$ және $u_0 \in L^2(\Omega)$ болсын. Онда

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{p-1}}}, t \geq 0, \quad (2.4.11)$$

мұндағы $M > 0$ - u_0 бастапқы функциясының $L^2(\Omega)$ кеңістігіндегі нормасына тәуелді тұрақты шама.

2.4.6 – ескерту Айталық $p = 2$ болсын, онда тұрақты шамаларды есепке алмасақ (2.4.11) бағалауы (2.4.7) бағалауымен сәйкес келеді.

2.4.7 – ескерту [30] жұмыста (2.4.9), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің $\beta = 0$ жағдайы зерттеліп, келесі

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha}{p-1}}}, \frac{2n}{n+2} \leq p < \infty, t \geq 0$$

бағалау алынған болатын, ол (2.4.11) бағалауының $\beta = 0$ дербес жағдайына сәйкес келеді.

2.4.5 – теоремасының дәлелдеуі. (2.4.9) теңдеуін $u(t, x)$ -ға көбейтіп, Ω бойынша бөліктеп интегралдау арқылы

$$\int_{\Omega} u(t, \cdot) [{}^c D_{0+,t}^{\alpha} u(t, \cdot)] dx + a(t) \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}^p = 0, t > 0$$

теңдігін аламыз.

$\frac{2n}{n+2} \leq p < \infty$ болсын делік. Онда (2.4.10) теңсіздігін $q = 2$ жағдайында соңғы теңдіктің бірінші мүшесіне қолданып, және

$$H_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega), \frac{2n}{n+2} \leq p < \infty,$$

Соболев енгізуін екінші мүшесіне қолданып

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \partial_{0+,t}^{\alpha} (\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}) + Ca(t) \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^p \leq 0, t > 0.$$

теңсіздігін аламыз. Енді, (H) тұжырымын ескере отырып, соңғы теңсіздіктен

$${}^c D_{0+,t}^{\alpha} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + Ct^{\beta} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} \leq 0, t > 0$$

шығады, мұндағы C оң тұрақты шама. Осыдан $H(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ (2.4.4) теңдеуінің субшешімі болып табылады. Демек, $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{p-1}}}$.

Толық дәлелденді.

2.4.4 Бөлшек ретті кеуекті орта теңдеуі

Бұл бөлімде келесі түрдегі

$$\mathcal{A}(u) := \nabla(g(u)\nabla u)$$

операторды қарастырамыз, мұнда біз бөлшек ретті жалпыланған кеуекті орта теңдеуін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - a(t)\nabla(g(u(t, x))\nabla u(t, x)) = 0 \quad (2.4.12)$$

зерттейміз, мұндағы $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega := \Omega_+$. $g(u)$ функциясы келесі қасиетке ие делік:

$$(H1): g(u) \geq c_0 u^m, m \geq 0, c_0 > 0.$$

(2.4.12), (2.4.2)-(2.4.3) есептерінің әлсіз локалды шешімі $u(t, x)$ бар екендігі [27] жұмыста Галеркин жуықтау әдісі арқылы дәлелденген.

2.4.9 – теорема Айталық (2.4.12), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің шешімі u болсын. Айталық, $a(t)$ және $g(u)$ функциялары (H) және (H1) тұжырымдарды қанағаттандырсын. Егер $u_0 \in L^2(\Omega)$ болса, онда

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{m+1}}}, t \geq 0, \quad (2.4.13)$$

мұндағы $M > 0$ - u_0 бастапқы функциясының $L^2(\Omega)$ -дегі нормасына тәуелді тұрақты шама.

2.4.10 – ескерту (2.4.9), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің $\beta = 0$ жағдайы [32] жұмыста зерттелген, және төмендегі бағалау алынған

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha}{m+1}}}, t \geq 0,$$

бұл (2.4.13) бағалауының $\beta = 0$ жағдайына сәйкес келеді.

2.4.9 – теоремасының дәлелдеуі. (2.4.12) теңдеуін $u(t, x)$ функциясына көбейтіп, (H) тұжырымын ескере отырып Ω облысы бойынша бөліктеп интегралдаймыз

$$\int_{\Omega} u(t, x) [{}^c D_{0+,t}^{\alpha} u(t, x)] dx + \kappa t^{\beta} \int_{\Omega} g(u(t, x)) |\nabla u(t, x)|^2 dx \leq 0.$$

Соңғы теңсіздіктің екінші мүшесін (H1)-ді ескеріп келесі түрде бағалаймыз

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g(u(t, x)) |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ & \geq c_0 \int_{\Omega} u^m(t, x) |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ & = c_0 \int_{\Omega} \left| u^{\frac{m}{2}}(t, x) \nabla u(t, x) \right|^2 dx \\ & \geq C \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{m+2}{2}}(t, x) \right|^2 dx, C > 0. \end{aligned}$$

Пуанкаре теңсіздігі мен енгізу теоремасын қолданып

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{m+2}{2}}(t, x) \right|^2 dx \geq \lambda_1 \int_{\Omega} \left| u^{\frac{m+2}{2}}(t, x) \right|^2 dx \\ & = \lambda_1 \int_{\Omega} |u(t, x)|^{m+2} dx \\ & = \lambda_1 \| u(t, \cdot) \|_{L^{m+2}(\Omega)}^{m+2} \\ & \geq C \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}^{m+2} \end{aligned}$$

аламыз, мұндағы $C > 0$. (2.4.10) теңсіздігінен және жоғарыдағы есептеулерден

$${}^c D_{0+,t}^{\alpha} \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} + C t^{\beta} \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}^{m+1} \leq 0, t > 0$$

шығады. Онда $H(t) = \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}$ - (2.4.4) теңдеуінің субшешімі болып табылады және сәйкесінше (2.4.13) шығады.

2.4.5 Бөлшек ретті өзгешеленген диффузия теңдеуі

Бұл бөлімде келесі түрде берілген

$${}^c D_{0+,t}^{\alpha} u(t, x) - a(t) f(u(t, x)) \Delta u(t, x) = 0, (t, x) \in \Omega_+ \quad (2.4.14)$$

бөлшек ретті өзгешеленген диффузия теңдеуін қарастырамыз, мұндағы $\mathcal{A}(u)$ операторы келесі түрде

$$\mathcal{A}(u) := f(u)\Delta u$$

анықталған, $f(u)$ функциясы келесі қасиетке ие болсын:

$$(H2): f(u)u \geq c_1 u^{q+1}, q \geq 0, c_1 > 0.$$

2.4.12 – теорема Айталық $u(t, x)$ функциясы (2.4.14), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің шешімі болсын. $a(t)$ және $f(u)$ функциялары сәйкесінше (H) пен (H2) тұжырымдарын қанағаттандырсын. Егер $u_0 \in L^2(\Omega)$ болса, онда

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{q+1}}}, t \geq 0 \quad (2.4.15)$$

теңсіздігі орынды, мұндағы $M > 0$ - u_0 бастапқы функциясының $L^2(\Omega)$ -дегі нормасына тәуелді тұрақты шама.

2.4.12 – теоремасының дәлелдеуі. (2.4.14) теңдеуін $u(t, x)$ функциясына көбейтіп, Ω облысы бойынша бөліктеп интегралдасақ, (H) және (H2) тұжырымдарын ескеріп,

$$\int_{\Omega} u(t, x) [{}^c D_{0+,t}^{\alpha} u(t, x)] dx + c_1 \kappa t^{\beta} \int_{\Omega} \nabla u^{q+1}(t, x) \nabla u(t, x) dx \leq 0, t > 0$$

теңсіздігін аламыз. Соңғы теңсіздіктің екінші мүшесін

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u^{q+1}(t, x) \nabla u(t, x) dx &= (q+1) \int_{\Omega} u^q(t, x) |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ &= (q+1) \int_{\Omega} \left| u^{\frac{q}{2}}(t, x) \nabla u(t, x) \right|^2 dx \\ &= \frac{2(q+1)}{q+2} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{q+2}{2}}(t, x) \right|^2 dx \end{aligned}$$

түрінде жазуға болады. Пуанкаре теңсіздігі қолданып

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{q+2}{2}}(t, x) \right|^2 dx &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} \left| u^{\frac{q+2}{2}}(t, x) \right|^2 dx \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} |u(t, x)|^{q+2} dx \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 \|u(t, \cdot)\|_{L^{q+2}(\Omega)}^{q+2}$$

$$\geq C \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{q+2}$$

теңсіздігін аламыз, мұндағы $C > 0$. (2.4.10) теңсіздігі мен жоғарыдағы есептеулерді қолданып

$${}^c D_{0+,t}^\alpha \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + Ct^\beta \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^{q+1} \leq 0, t > 0.$$

Онда $H(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ функциясы (2.4.4) есебінің субшешімі болады, сәйкесінше (2.4.15) бағалауы орындалады.

2.4.6. Бөлшек ретті орташа қисықтық диффузия теңдеуі.

Келесі түрде берілген

$$\mathcal{A}(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(t, x)}{1 + |\nabla u(t, x)|^2} \right)$$

квазисызықты операторды қарастырамыз. Бұл жағдайда (2.4.1) теңдеуі

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - a(t) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(t, x)}{1 + |\nabla u(t, x)|^2} \right) = 0, (t, x) \in \Omega_+ \quad (2.4.16)$$

орташа қисықтық субдиффузия теңдеуімен сәйкес келеді.

2.4.13 – теорема Айталық $u(t, x)$ функциясы (2.4.16), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің шешімі болсын. Сонымен қатар, $u_0 \in L^2(\Omega)$ және $a(t)$ функциясы (H) тұжырымын қанағаттандырсын. Егер

$$\sup_{x \in \Omega, t > 0} |\nabla u(t, x)| < +\infty, n \geq 3 \quad (2.4.17)$$

болса, онда

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\alpha+\beta}} \quad (2.4.18)$$

бағалауы орындалады, мұндағы $M > 0$ - u_0 бастапқы функциясының $L^2(\Omega)$ нормасына тәуелді тұрақты шама.

2.4.14 – ескерту [32] жұмыста (2.4.16), (2.4.2)-(2.4.3) есебі үшін $\beta = 0$ жағдайында зерттелген, және шешімінің бағалауы

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^\alpha}$$

түрінде алынған, ол $\beta = 0$ болғанда (2.4.18) бағалауымен сәйкес келеді.

2.4.13 – теоремасының дәлелдеуі. (2.4.16) теңдеуіне $u(t, x)$ функциясын көбейтіп, Ω облысы бойынша интегралдау арқылы

$$\int_{\Omega} u(t, x) [{}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x)] dx + a(t) \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(t, x)|^2}{1 + |\nabla u(t, x)|^2} dx = 0, \quad t > 0$$

теңдігін аламыз. [32] жұмысындағы нәтижелер бойынша, егер

$$\sup_{x \in \Omega, t > 0} |\nabla u(t, x)| < +\infty, n \geq 3$$

болса, онда

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(t, x)|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u(t, x)|^2}} dx \geq C \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2, C > 0.$$

Содан кейін (H) тұжырымын және (2.4.10) ескере отырып

$${}^c D_{0+,t}^\alpha \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + Ct^\beta \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad t > 0$$

аламыз. Онда $H(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ функциясы (2.4.18) түрінде берілген (2.4.4) теңдеуінің субшешімі болып табылады. Нәтижесінде (2.4.18) аламыз.

2.4.7. Кирхгоф тектес субдиффузия теңдеу

Бұл бөлімде $\mathcal{A}(u)$ операторы

$$\mathcal{A}(u) := M(\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^q(\Omega)}) \Delta u$$

түрінде берілген, мұндағы $q > 1$. Енді Кирхгоф квазисызықтылығы бар бөлшек ретті диффузия теңдеуін

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - a(t) M(\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^q(\Omega)}) \Delta u(t, x) = 0, (t, x) \in \Omega_+ \quad (2.4.19)$$

зерттейміз. Келесі

$$(H3): M(s) \geq bs^\gamma, s > 0, b > 0, \gamma \geq 0$$

тұжырым орындалсын делік.

2.4.15 – теорема Бастапқы шарты $u_0 \in L^2(\Omega)$ болатын (2.4.19), (2.4.2)-(2.4.3) есебінің шешімі $u(t, x)$ бар болсын. Сонымен қатар, (Н) және (Н3) тұжырымдары орындалады деп есептейік. Онда шешімнің бағалауы

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}}}, t \geq 0 \quad (2.4.20)$$

түрінде беріледі және мұндағы $M > 0$ - u_0 бастапқы функциясының $L^2(\Omega)$ -дегі нормасына тәуелді тұрақты шама.

Мысалдар Айталық, $q = 2$ және $M(s) = k_1 + k_2 s, k_1, k_2 > 0$ болсын. Онда, (2.4.19) теңдеуінің орнына

$${}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x) - a(t)(k_1 + k_2 \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}) \Delta u(t, x) = 0$$

теңдеуін аламыз. Сонда 2.4.9 теоремасы бойынша

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{1+t^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}$$

шешімнің бағалауын аламыз. Сол сияқты $M(s)$ функциялары үшін (Н3) тұжырымды қанағаттандыратын басқа да әртүрлі

$$M(s) = k, k = \text{const} > 0,$$

$$M(s) = e^{ks} \geq 1 + ks > ks, k > 0,$$

$$M(s) = (1+s)^\gamma \geq 1+s > s, \gamma \geq 1,$$

мысалдарды қарастыруға болады.

2.4.15 – теоремасының дәлелдеуі. (2.4.19) теңдеуін $u(t, x)$ функциясына көбейтін, Ω облысы бойынша

$$\int_{\Omega} u(t, x) [{}^c D_{0+,t}^\alpha u(t, x)] dx + a(t) M(\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^q(\Omega)}) \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx = 0$$

бөліктеп интегралдаймыз. (2.4.10) мен (Н) және (Н3) тұжырымдарынан

$${}^c D_{0+,t}^\alpha \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \kappa t^\beta \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^q(\Omega)}^\gamma \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0, t > 0$$

нәтижесіне ие боламыз. Келесі кезекте, $\frac{2n}{n+2} \leq q < \infty$ болсын. Онда, Соболев теңсіздігінен

$$\| \nabla u(t, \cdot) \|_{L^q(\Omega)}^\gamma \geq C_1 \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}^\gamma$$

орынды, мұндағы $C > 0$ Соболев теңсіздігінің тұрақтысы. Демек

$${}^c D_{0+,t}^\alpha \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} + C t^\beta \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}^{\gamma+1} \leq 0, \quad t > 0$$

$\gamma + 1 > 0$ болғандықтан, $H(t) = \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}$ функциясы (2.4.20) түрінде берілген (2.4.4) теңдеуінің субшешімі болып табылады.

2.5. Айнымалы коэффициентті жылу өткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептер

2.5.1. Коши-Дирихле есебі

Бұл бөлімде келесі түрде берілген Коши-Дирихле есебін

$$u_t(t, x) - a(t)\Delta u(t, x) = 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega := \Omega_+, \quad (2.5.1)$$

$$u(t, x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \quad (2.5.2)$$

$$u(0, x) = \phi(x), x \in \bar{\Omega} \quad (2.5.3)$$

карастырамыз, мұндағы $a(t)$ функциясы келесі шартты қанағаттандырсын

$$\int_0^t a(s)ds > 0, t > 0.$$

Басқа бөлімдерден айырмашылығы, мұнда (H) шартының орындалуын талап етпейміз, жалпылама $a(t)$ функциясын қарастырамыз.

2.5.1 – анықтама (2.5.1)-(2.5.3) есебінің шешімі деп $u \in C([0, \infty); L^2(\Omega))$, $u_t, \Delta u \in C((0, \infty); L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

2.5.2 – теорема Айталық $\int_0^t a(s)ds > 0, t > 0$ және $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын. Онда (2.5.1)-(2.5.3) есебінің u шешімі бар, жалғыз және келесідей беріледі

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(s)ds} e_k(x), (t, x) \in \Omega_+, \quad (2.5.4)$$

мұндағы $\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx$, $k \in N$. Сонымен қатар, $u(t, x)$ шешімі келесі

$$m_1 e^{-\lambda_1 \int_0^t a(s)ds} \leq \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} \leq M_1 e^{-\lambda_1 \int_0^t a(s)ds}, t \geq 0$$

бағалауын қанағаттандырады. Мұндағы m_1 және M_1 оң тұрақты шамалар.

2.5.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Айталық $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын делік. Сонымен қатар $\{\lambda_k > 0, k \in \mathbb{N}\}$ арқылы Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті мәндерін, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ арқылы сәйкесінше ортонормаланған меншікті функцияларын белгілейік. Онда (2.5.1) – (2.5.3) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e_k(x), (t, x) \in R_+ \times \Omega, \quad (2.5.5)$$

мұндағы $T_k(t)$ белгісіз функция. Сондай ақ $\phi(x)$ функциясы келесі түрге ие болады

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), x \in \Omega,$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx.$$

(2.5.5)-ті (2.5.1) теңдеуіне қою арқылы келесі Коши есебін

$$T'_k(t) + \lambda_k a(t) T_k(t) = 0, t > 0, \quad (2.5.6)$$

$$T_k(0) = \phi_k \quad (2.5.7)$$

аламыз. (2.5.6)-(2.5.7) есебін келесі қадамдар жасау арқылы шешеміз

$$\frac{dT_k(t)}{T_k(t)} = -\lambda_k a(t)$$

$$\int_0^t \frac{dT_k(\tau)}{T_k(\tau)} = -\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau$$

$$\ln T_k(t) - \ln T_k(0) = -\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau$$

$$\ln \frac{T_k(t)}{T_k(0)} = -\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau$$

$$T_k(t) = T_k(0) \cdot e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau}.$$

Онда (2.5.6)-(2.5.7) Коши есебінің шешімі

$$T_k(t) = \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \quad (2.5.8)$$

теңдігі болады, осыдан біз (2.5.1)-(2.5.3) есебінің шешімін табамыз

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} e_k(x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega. \quad (2.5.9)$$

Шешімнің жинақтылығы. Парсевал теңдігі мен (2.5.4) теңдігінен

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sup_{t \geq 0} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

бағалауын аламыз. $u_t(t, x)$ және Δu есептесек, келесі

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right) e_k(x) \\ &= -a(t) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} e_k(x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

және

$$\begin{aligned} \Delta u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \Delta e_k(x) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} e_k(x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

теңдіктерін шығарамыз. (2.5.11)-(2.5.12) қолданып, келесі

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \frac{u_t(t, \cdot)}{a(t)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty,$$

және

$$\sup_{t \geq 0} \|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

бағалауларына келеміз.

Шешімнің жалғыздығы Айталық $u_1(t, x)$ және $u_2(t, x)$ функциялары (2.5.1)-(2.5.3) есебінің екі шешімі болсын және $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ белгілеуін енгізейік. Онда $u(t, x)$ функциясы (2.5.1) теңдеуі мен (2.5.2), (2.5.3) біртекті шарттарын қанағаттандырады. $T_k(t)$ функция келесідей анықталсын

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx, \quad k \in N, t \in [0, \infty). \quad (2.5.13)$$

(2.5.1) теңдеуін ескере отырып, (2.5.13) функциясының уақыт бойынша бірінші ретті туындысын есептейік

$$\begin{aligned} T'_k(t) &= \int_{\Omega} u_t(t, x) e_k(x) dx \\ &= a(t) \int_{\Omega} \Delta u(t, x) e_k(x) dx \\ &= a(t) \int_{\Omega} u(t, x) \Delta e_k(x) dx \\ &= -a(t) \lambda_k \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx \\ &= -a(t) \lambda_k T_k(t), \quad k \in N, t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

(2.5.2), (2.5.3) шарттарынан

$$T_k(0) = 0$$

екені шығады. $T_k(t) = 0$ теңдігінен $u(t, x) \equiv 0$ функциясының тривиалды екені шығады. Демек, $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ тең, (2.5.1)-(2.5.3) есебінің шешімі жалғыздығын дәлелдедік.

Шешімнің бағалауы.

$$\begin{aligned}
\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq |\phi_1|^2 \left| e^{-\lambda_1 \int_0^t a(\tau) d\tau} \right|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right|^2 \\
&\leq M_1 e^{-\lambda_1 \int_0^t a(s) ds}.
\end{aligned}$$

Сонымен, (2.5.1)-(2.5.3) есебінің шешімінің бағалауы келесі түрде болатынын көрсеттік

$$m_1 e^{-\lambda_1 \int_0^t a(s) ds} \leq \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_1 e^{-\lambda_1 \int_0^t a(s) ds}, t \geq 0.$$

2.5.2. Коши-Нейман есебі

Бұл бөлімде келесі түрде берілген Коши-Нейман есебін

$$u_t(t, x) - a(t)\Delta u(t, x) = 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega := \Omega_+, \quad (2.5.14)$$

$$\partial_\nu u(t, x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, t > 0, \quad (2.5.15)$$

$$u(0, x) = \phi(x), x \in \bar{\Omega} \quad (2.5.16)$$

қарастырамыз, мұндағы $a(t)$ функциясы келесі шартты қанағаттандырады

$$\int_0^t a(s) ds > 0, t > 0.$$

2.5.3 – анықтама Айталық, $a(t) \in C(R_+)$ және $\phi(x) \in C(\Omega)$ болсын. Онда (2.5.14)-(2.5.16) есебінің жалпыланған шешімі $u_t, \Delta u \in C(R_+ \times \Omega)$ шарттарын қанағаттандыратын $u(t, x) \in C(R_+, \Omega)$ функциясы болып табылады.

2.5.4 – теорема $\int_0^t a(s) ds > 0, t > 0$ және $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын. Сонда (2.5.14)-(2.5.16) есебінің $u(t, x)$ жалпыланған шешімі бар, жалғыз және келесідей берілген

$$u(t, x) = \phi_0 + \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(s) ds} e_k(x), (t, x) \in \Omega_+, \quad (2.5.17)$$

мұндағы $\phi_0 = \int_{\Omega} \phi(x) dx$, $\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx$, $k \in N$. Сонымен қатар, $u(t, x)$ шешімі келесі

$$m_2 e^{-\lambda_2 \int_0^t a(s) ds} \leq \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_2 e^{-\lambda_2 \int_0^t a(s) ds}, t \geq 0$$

бағалауын қанағаттандырады. Мұндағы m_2 және M_2 оң тұрақты шамалар.

2.5.4 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешілімділігі. $\{\lambda_k \geq 0, k \in N\}$ және $\{e_k, k \in N\}$ Δ – Лаплас операторының меншікті мәндері мен сәйкесінше меншікті және $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын, онда (2.5.14) – (2.5.16) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) e_k(x), (t, x) \in R_+ \times \Omega, \quad (2.5.18)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), x \in \Omega,$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx$$

және

$$\phi_0 = \int_{\Omega} \phi(x) dx.$$

(2.5.18) теңдігін (2.5.14) теңдеуіне қолдансақ, келесі Коши есебін

$$T'_k(t) + \lambda_k a(t) T_k(t) = 0, t > 0, \quad (2.5.19)$$

$$T_k(0) = \phi_k \quad (2.5.20)$$

аламыз. (2.5.19)-(2.5.20) Коши есебінің шешімі

$$T_k(t) = \phi_0 + \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \quad (2.5.21)$$

теңдігі болады, осыдан біз (2.5.14)-(2.5.16) есебінің шешімін табамыз

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} e_k(x), (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega. \quad (2.5.22)$$

Шешімнің жинақтылығы. Парсевал теңдігі мен (2.5.17) теңдігінен

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= \sup_{t \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\phi_0|^2 = C \quad (2.5.23)$$

бағалауын аламыз. $u_t(t, x)$ және $\Delta u(t, x)$ есептеу арқылы

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right) e_k(x) \\ &= -a(t) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} e_k(x) \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

және

$$\begin{aligned} \Delta u(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \Delta e_k(x) \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} e_k(x) \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

теңдіктерін шығарамыз. (2.5.24)-(2.5.25) қолданып, келесі

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \frac{u_t(t, \cdot)}{a(t)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

және

$$\sup_{t \geq 0} \|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

бағалауларына келеміз.

Шешімнің жалғыздығы 2.5.2 – теоремасының дәлелдеуіндей дәлелдейміз.

Шешімнің бағалауы.

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq |\phi_0|^2 + |\phi_1|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| e^{-\lambda_k \int_0^t a(\tau) d\tau} \right|^2$$

$$\leq M_2 e^{-\lambda_2 \int_0^t a(s) ds}.$$

Сонымен, (2.5.1)-(2.5.3) есебінің шешімінің бағалауы келесі түрде болатынын көрсеттік

$$m_2 e^{-\lambda_2 \int_0^t a(s) ds} \leq \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} \leq M_2 e^{-\lambda_2 \int_0^t a(s) ds}, t \geq 0.$$

(2.5.1) теңдеуінде $a(t)$ функциясын нақты түрде таңдай отырып, шешімнің ыдырауының әртүрлі түрлерін алуға болады. Төменде $a(t)$ функциясының кейбір дербес жағдайларын келтіреміз.

2.5.5 – мысал Айталық,

$$a(t) := \beta t^{\beta-1}, \beta > 0$$

деп есептейік, онда ыдырау жылдамдығы

$$m_1 e^{-\lambda_1 t^\beta} \leq \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} \leq M_1 e^{-\lambda_1 t^\beta}, t \geq 0$$

түрде және шешімі келесі түрде болады

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-\lambda_1 t^\beta} e_k(x), (t, x) \in \Omega_+.$$

2.5.6 – мысал Айталық,

$$a(t) := \frac{p}{(1 + \log(1 + t))(1 + t)}, p > 0$$

болсын, онда

$$\frac{m_1}{(1 + \log(1 + t))^{p\lambda_1}} \leq \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1}{(1 + \log(1 + t))^{p\lambda_1}}, t \geq 0.$$

Бұл жағдайда шешімі

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} (1 + \log(1 + t))^{-\lambda_k p} e_k(x), (t, x) \in \Omega_+$$

арқылы анықталады.

2.5.7 – мысал Айталық,

$$a(t) := q \frac{\sum_{j=1}^m j a_j t^{j-1}}{\sum_{j=0}^m a_j t^j}, q > 0, a_j > 0, j = 1, \dots, m$$

болсын делік, онда

$$m_1 \left(\sum_{j=0}^m a_j t^j \right)^{-q\lambda_1} \leq \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} \leq M_1 \left(\sum_{j=0}^m a_j t^j \right)^{-q\lambda_1}, t \geq 0$$

және шешімі

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \left(\sum_{j=0}^m a_j t^j \right)^{-q\lambda_k} e_k(x), (t, x) \in \Omega_+$$

түрінде анықталады. Мұндағы m_1 және M_1 оң тұрақты шамалар.

3 АДАМАР БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР

3.1. Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Дирихле және Коши-Нейман есептерінің шешімділігі

Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$, облысы $\partial\Omega$ шекарасында тегіс ашық шенелген облыс болсын. Келесі түрдегі бөлшек ретті Коши-Дирихле есебін

$$\begin{cases} {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t,x) - \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \Delta_x u(t,x) = 0, t > a > 0, x \in \Omega, \\ {}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} u(a,x) = \phi(x), x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, t > a, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1)$$

қарастырамыз, мұндағы $\beta > -\alpha$, ${}_H D_{a+,t}^\alpha$, ${}_H I_{a+,t}^{1-\alpha}$ операторлары реті $\alpha \in (0,1)$ болатын Адамар бөлшек ретті туындысы мен интегралы.

3.1.1 – анықтама (3.1.1) есебінің шешімі деп $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} u \in C((a, \infty), L^2(\Omega))$, $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha-\beta} {}_H D_{a+,t}^\alpha u$, $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} \Delta_x u \in C((a, \infty), L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

3.1.2 – теорема Айталық, $\beta > -\alpha$ және $\phi \in H^2(\Omega)$ болсын. Онда $u(t,x)$ функциясы (3.1.1) есебінің жалғыз шешімі келесі формуламен

$$u(t,x) = \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}\right) e_k(x) \quad (3.1.2)$$

анықталады, мұндағы $\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k \in \mathbb{N}, t > a > 0, x \in \Omega$, және $E_{\alpha, m, l}(z)$ - Килбас-Сайго функциясы.

3.1.2 – теореманың дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Айталық, $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын. Сонымен қатар $\{\lambda_k > 0, k \in \mathbb{N}\}$ арқылы Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті мәндерін, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ арқылы сәйкесінше ортонормаланған меншікті функцияларын белгілейік. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ -де ортонормаланған базис болғандықтан, $u(t,x)$ және $\phi(x)$ функцияларын

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e_k(x), (t,x) \in (a, \infty) \times \Omega \quad (3.1.3)$$

және

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), x \in \Omega$$

түрінде өрнектей аламыз, мұндағы $T_k(t)$ белгісіз функция және $\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx$. (3.1.3)-ді (3.1.1)-ге қойып есептесек, белгісіз $T_k(t)$ функциясы үшін Коши есебін

$$\begin{cases} {}_H D_{a+,t}^{\alpha} T_k(t) + \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} T_k(t) = 0, t > a, \\ {}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} T_k(a) = \phi_k \end{cases} \quad (3.1.4)$$

аламыз. Берілген Коши есебінің шешімі [9, 227 бет] келесі түрге ие

$$T_k(t) = \frac{\left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right). \quad (3.1.5)$$

Сәйкесінше

$$u(t, x) = \frac{\left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) e_k(x). \quad (3.1.6)$$

Шешімнің жинақтылығы. (1.1.28) бағалауын (3.1.5)-ке қолданып, келесі бағалауды аламыз

$$T_k(t) \leq \frac{|\phi_k| \left| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} \right|}{\Gamma(\alpha) \left(1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right)^{1+\frac{1}{m}}}.$$

Онда Парсеваль теңдігін пайдаланып

$$\begin{aligned} & \sup_{t>a} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sup_{t>a} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t>a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(1+\alpha m)}{\Gamma(1+\alpha(m+1))} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}\right)^{2\left(1+\frac{1}{m}\right)}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k(\cdot)|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

${}_H D_{a+,t}^\alpha$ және Δ_x операторларын (3.1.6) өрнегіне қолданып келесі нәтижелерді аламыз

$$\begin{aligned}
&{}_H D_{a+,t}^\alpha u(t,x) = \\
&= -\frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}\right) e_k(x)
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

және

$$\Delta_x u(t,x) = -\frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}\right) e_k(x). \tag{3.1.9}$$

Онда

$$\sup_{t>a} \left\| \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha-\beta} {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t,\cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2$$

және

$$\sup_{t>a} \left\| \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} \Delta_x u(t,\cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Шешімнің жалғыздығы. Айталық $u_1(t,x)$ және $u_2(t,x)$ функциялары (3.1.1) есебінің шешімдері болсын делік. Келесі белгілеуді енгізейік $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$. Айталық

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t,x) e_k(x) dx, k \in N, t \in (a, \infty) \tag{3.1.10}$$

болсын. (3.1.1) –ді ескере отырып, ${}_H D_{a+,t}^\alpha$ операторын (3.1.10) арқылы берілген $T_k(t)$ функциясына қолдансақ

$${}_H D_{a+,t}^\alpha [T_k](t) = \int_{\Omega} {}_H D_{a+,t}^\alpha [u(t,x) e_k(x)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \int_{\Omega} \Delta_x u(t, x) e_k(x) dx \\
&= \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \int_{\Omega} u(t, x) \Delta_x e_k(x) dx \\
&= - \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \lambda_k \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx \\
&= - \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \lambda_k T_k(t)
\end{aligned}$$

теңдігі шығады. Онда, (3.1.10) функциясы (3.1.4) біртекті Коши есебінің шешімі болып табылады. Содан кейін

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx = 0 \quad (3.1.11)$$

аламыз. Онда, $L^2(\Omega)$ -де $\{e_k(x)\}$ жүйесінің толықтығына байланысты (3.1.11)-ден $u(t, x) \equiv 0$ шығады. Демек, $u_1(t, x) = u_2(t, x)$, яғни (3.1.1) есебінің шешімі жалғыз.

Коши-Нейман есебі. Әрі қарай, Коши-Нейман шарттарымен берілген келесі субдиффузия теңдеуін

$$\begin{cases} {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t, x) - \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \Delta_x u(t, x) = 0, t > a > 0, x \in \Omega, \\ {}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} u(a, x) = \phi(x), x \in \Omega, \\ \partial_\nu u(t, x) = 0, t > a, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.12)$$

зерттейміз, мұндағы $\beta > -\alpha$ және ∂_ν сыртқы нормал туынды.

3.1.3 – анықтама (3.1.12) есебінің шешімі деп $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} u(t, x) \in C((a, \infty), L^2(\Omega))$, $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha-\beta} {}_H D_{a+,t}^\alpha u, \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} \Delta_x u \in C((a, \infty), L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

3.1.4 – теорема Айталық, $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын. Онда (3.1.12) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде анықталады

$$u(t, x) = \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_0$$

$$+ \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}\right) e_k(x),$$

мұндағы

$$\phi_0 = \int_{\Omega} \phi(x) dx, \phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k \in N$$

және $E_{\alpha, m, l}(z)$ Килбас-Сайго функциясы.

3.2. Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешімділігі

Бұл бөлімде, келесі түрде берілген Коши есебін

$$\begin{cases} {}_H D_{a+, t}^{\alpha} u(t, x) - \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta} \Delta_x u(t, x) = 0, t > a > 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ {}_H I_{a+, t}^{1-\alpha} u(a, x) = \phi(x), x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.2.1)$$

карастырамыз. $H^2(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \xi^2) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

нормасымен анықталған Гильберт-Соболев кеңістігі

$$H^2(\mathbb{R}^N) = \{u: u \in L^2(\mathbb{R}^N); \Delta_x u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

болсын, мұндағы $\hat{u}(\xi)$ Фурье түрлендіруі.

3.2.1 – анықтама (3.2.1) есебінің шешімі деп $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} u \in C((a, \infty), L^2(\mathbb{R}^N)), \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha-\beta} {}_H D_{a+, t}^{\alpha} u, \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} \Delta_x u \in C((a, \infty), L^2(\mathbb{R}^N))$ функциясын айтамыз.

3.2.2 – теорема Айталық, $\alpha \in (0, 1), \beta > -\alpha$ және $\phi \in H^2(\mathbb{R}^N)$ болсын. (3.2.1) есептің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде

$$u(t, x) = \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}\right) d\xi \quad (3.2.2)$$

анықталады, мұндағы $\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-is\xi} \phi(s) ds$. Сонымен қатар, $u(t, x)$ шешімі келесі

$$\sup_{t>a} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \| \phi(\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t>a} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha-\beta} D_{a+,t}^\alpha u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \| \phi(\cdot) \|_{H^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t>a} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} \| \Delta_x u(t, \cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \| \phi(\cdot) \|_{H^2(\mathbb{R}^N)}$$

бағалауларды қанағаттандырады.

3.2.2 – теоремасын дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. (3.2.1) есебіне Фурье түрлендіруін қолданып, келесі

$$\begin{cases} {}_H D_{a+,t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) + |\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \hat{u}(t, \xi) = 0, t > a > 0, \xi \in \mathbb{R}^N, \\ {}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} \hat{u}(a, \xi) = \hat{\phi}(\xi) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

есепті аламыз, (3.2.3) есебінің жалпы шешімі [9, 227 бет] келесі өрнекпен анықталады

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right). \quad (3.2.4)$$

Кері Фурье түрлендіруін қолданып, (3.2.1) есептің шешімін аламыз

$$u(t, x) = \frac{\left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) d\xi.$$

Шешімнің жинақтылығы. (1.1.28) бағалауын және Планшерель теоремасын қолданып келесі теңсіздік шығады

$$\begin{aligned} & \sup_{t>a} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} u(t, x) \right|^2 dx \\ &= \sup_{t>a} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} \hat{u}(t, \xi) \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{t>a} \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) \right|^2 d\xi$$

$$\leq \| \hat{\phi}(\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \| \phi(\cdot) \|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

${}_H D_{a+,t}^\alpha$ операторын $u(t, x)$ функциясына қолдану арқылы

$${}_H D_{a+,t}^\alpha u(t, x) =$$

$$= - \frac{\left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) |\xi|^2 E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) d\xi$$

теңдігін шығарамыз. Демек,

$$\sup_{t>a} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha-\beta} {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \| \phi(\cdot) \|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2$$

Сол сияқты, Δ_x операторы үшін

$$\sup_{t>a} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} \Delta_x u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \| \phi(\cdot) \|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2$$

теңсіздігі орынды.

Шешімнің жалғыздығы. $u_1(t, x)$ және $u_2(t, x)$ функциялары (3.2.1) есептің шешімдері болсын. Онда $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (3.2.1) Коши есебін біртекті шартымен қанағаттандырады. Келесі функцияны қарастырайық

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx, (t, \xi) \in (a, \infty) \times \mathbb{R}^N. \quad (3.2.5)$$

(3.2.1) теңдеуін ескере отырып, ${}_H D_{a+,t}^\alpha$ операторын (3.2.5) қолдансақ

$${}_H D_{a+,t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t, x) dx$$

$$= - \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \Delta_x u(t, x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 \hat{u}(t, x))] \\
&= -\left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi)
\end{aligned}$$

анықталады және (3.2.3)-тен ${}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} \hat{u}(a, \xi) = 0$. Демек, (3.2.4) өрнегінен $\hat{u}(t, \xi) = 0, t > a, \xi \in \mathbb{R}^N$ шығарады, яғни

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx = 0.$$

Соңғы теңдікке кері Фурье түрлендіруін қолдану арқылы $u(t, x) \equiv 0$ аламыз, онда $u_1(t, x) = u_2(t, x)$. Демек, (3.2.1) есептің шешімі жалғыз.

3.3 Адамар туындысы үшін Лейбниц ережесінің аналогы және оның сызықты және квазисызықты есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданылуы

Бұл бөлімде Адамар туындысы үшін Лейбниц ережесінің аналогын алып және олардың кейбір бөлшек ретті диффузия және толқын теңдеулері үшін қойылған есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданылады.

Математикалық анализ курсынан екі функцияның көбейтіндісінің туындысы келесі Лейбниц ережесімен анықталатыны белгілі:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Риман-Лиувилль және Капуто туындылары үшін Лейбниц ережесінің аналогтары [20, 30] жұмыстарда алынған болатын. Адамар туындысы үшін Лейбниц ережесінің аналогын келесі лемма түрінде келтіреміз.

3.3.1 - лемма Айталық

$$u \in AC[a, T] \text{ және } v \in AC[a, T], 0 < \alpha < 1$$

болсын. Онда

$$\begin{aligned}
{}_H D_{a+,t}^\alpha [uv](t) &= u(t) {}_H D_{a+,t}^\alpha v(t) + v(t) {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t) \\
&- \frac{u(t)v(t)}{\Gamma(1-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^\alpha} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{(u(s)-u(t))(v(s)-v(t))}{s \left(\log \frac{t}{s}\right)^{1+\alpha}} ds
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

орынды.

3.3.1 леммасының дәлелдеуі. $u(s)v(s)$ үшін келесі өрнек орынды

$$\begin{aligned} u(s)v(s) &= (u(s) - u(t))(v(s) - v(t)) \\ &\quad + u(t)v(s) + u(s)v(t) - u(t)v(t). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Анықтама бойынша

$${}_H D_{a+,t}^\alpha [uv](t) = \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_a^{t+\varepsilon} \frac{u(s)v(s)}{s \left(\log \frac{t+\varepsilon}{s} \right)^\alpha} ds - \int_a^t \frac{u(s)v(s)}{s \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha} ds \right]. \quad (3.3.3)$$

(3.3.3), (3.3.2) өрнектерін қолданып,

$$\begin{aligned} {}_H D_{a+,t}^\alpha [uv](t) &= \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_a^{t+\varepsilon} \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t))}{s \left(\log \frac{t+\varepsilon}{s} \right)^\alpha} ds - \int_a^t \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t))}{s \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha} ds \right] \\ &\quad + \frac{tu(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_a^{t+\varepsilon} \frac{v(s)}{s \left(\log \frac{t+\varepsilon}{s} \right)^\alpha} ds - \int_a^t \frac{v(s)}{s \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha} ds \right] \\ &\quad + \frac{tv(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_a^{t+\varepsilon} \frac{u(s)}{s \left(\log \frac{t+\varepsilon}{s} \right)^\alpha} ds - \int_a^t \frac{u(s)}{s \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha} ds \right] \\ &\quad - \frac{tu(t)v(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_a^{t+\varepsilon} \frac{ds}{s \left(\log \frac{t+\varepsilon}{s} \right)^\alpha} - \int_a^t \frac{ds}{s \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha} \right] \\ &= u(t) {}_H D_{a+,t}^\alpha v(t) + v(t) {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t) \\ &\quad - \frac{u(t)v(t)}{\Gamma(1-\alpha) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t))}{s \left(\log \frac{t}{s} \right)^{1+\alpha}} ds \end{aligned}$$

теңдігін аламыз. 1.1.19 қасиеті бойынша алдыңғы теңдеудегі соңғы интегралды есептейміз

$$\begin{aligned}
& \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t))}{s \left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} ds \\
&= \frac{(u(a) - u(t))(v(a) - v(t))}{\Gamma(1-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{[(u(s) - u(t))(v(s) - v(t))]' ds}{\left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} \\
&= \frac{(u(a) - u(t))(v(a) - v(t))}{\Gamma(1-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^\alpha} + \lim_{s \rightarrow t} \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t))}{\Gamma(1-\alpha) \left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} \\
&\quad - \frac{(u(a) - u(t))(v(a) - v(t))}{\Gamma(1-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^\alpha} \\
&\quad - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t)) ds}{s \left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} \\
&= - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t)) ds}{s \left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Лемма дәлелденді.

Келесі жағдайларды қарастырайық. Егер u және v функцияларының таңбалары бірдей болса, онда

$${}_H D_{a+,t}^\alpha (uv)(t) \leq u(t) {}_H D_{a+,t}^\alpha v(t) + v(t) {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t). \quad (3.3.4)$$

Айталық, $u \in AC[a, T]$ және $0 < \alpha < 1$ болсын. (3.3.4) теңсіздігіне $u = v$ қолдансақ

$$2u(t) {}_H D_{a+,t}^\alpha u(t) \geq {}_H D_{a+,t}^\alpha u^2(t). \quad (3.3.5)$$

Онда

$${}_H D_{a+,t}^\alpha u^p \leq p u^{p-1} {}_H D_{a+,t}^\alpha u, \quad (3.3.6)$$

мұндағы $p \geq 2$ және $u \geq 0$.

3.3.1 Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептердің шешімдерінің априорлы бағалаулары

Айталық $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ шекарасында $\partial\Omega$ тегіс шенелген облыс болсын. Келесі түрде берілген бөлшек ретті диффузия теңдеуін

$${}_H D_{a+,t}^\alpha u = b(t)\Delta_x u + c(t,x)u + f(t,x), (t,x) \in (a,T] \times \Omega = Q, \quad (3.3.7)$$

Дирихле шеттік шартымен

$$u(t,x) = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega \quad (3.3.8)$$

немесе Нейман шеттік шартымен

$$\partial_\nu u = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega, \quad (3.3.9)$$

және бастапқы шартымен

$$\lim_{t \rightarrow a} \Gamma(\alpha) \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} u(a,x) = \phi(x) \quad (3.3.10)$$

қарастырамыз, мұндағы ∂_ν сыртқы нормал туындысы және

(A) $b(t)$ теріс емес үзіліссіз функция;

(B) $\|c\|_{C([a,T];L^2(\Omega))} = d$;

(C) $\|f\|_{C([a,T];L^2(\Omega))} = h$.

3.3.2 – теорема $\phi \in L^2(\Omega)$ болсын және (A), (B), (C) шарттары орындалсын. Егер $u(t,x)$ функциясы (3.3.7) теңдігін әрбір $t \in (a,T]$ үшін қанағаттандырса, онда

$$\|u\|_{C_{1-\alpha,\log}((a,T];L^2(\Omega))} \leq K_1(T)\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + K_2(T)\|f\|_{C((a,T];L^2(\Omega))} \quad (3.3.11)$$

теңсіздігі орынды, мұндағы

$$K_1(T) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + (2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right]$$

және

$$K_2(T) = \left(\log \frac{T}{a} \right) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + (2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha+1} \left((2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

3.3.2 – теоремасының дәлелдеуі. (3.3.7) теңдеуінің әрбір мүшесін $u(t, x)$ функциясына көбейтіп, Ω бойынша интегралдаймыз

$$\int_{\Omega} ({}_H D_{a+,t}^{\alpha} u) u dx = b(t) \int_{\Omega} (\Delta_x u) u dx + \int_{\Omega} c(t, x) u^2 dx + \int_{\Omega} f(t, x) u dx$$

(3.3.5) және $p, q = 2, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ үшін Гёльдер теңсіздігін пайдаланып, бөліктеп интегралдаймыз

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}_H D_{a+,t}^{\alpha} \int_{\Omega} u^2 dx &\leq b(t) \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - b(t) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \\ &+ \int_{\Omega} c(t, x) u^2 dx + \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Сәйкесінше, (B) және $-b(t) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \leq 0$ көмегімен

$${}_H D_{a+,t}^{\alpha} \int_{\Omega} u^2 dx \leq 2d \int_{\Omega} u^2 dx + 2 \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

теңсіздігін аламыз. (3.3.12) теңсіздіктің соңғы мүшесіне Юнг теңсіздігін қолданып

$${}_H D_{a+,t}^{\alpha} \int_{\Omega} u^2 dx \leq (2d + 1) \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \quad (3.3.13)$$

теңсіздігіне ие боламыз. (3.3.13)-те $y(t) = \|u(t, x)\|_{L^2(\Omega)}^2$ белгілеуін және (C) шартын қолданып, келесі түрдегі бөлшек ретті дифференциалдық теңсіздікті аламыз

$${}_H D_{a+,t}^{\alpha} y(t) \leq (2d + 1)y(t) + h. \quad (3.3.14)$$

(3.3.14) теңсіздігінің екі жағына да ${}_H I_{a+,t}^{\alpha}$ операторын және 1.1.17 леммасын қолданып, келесі

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \frac{({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} + \frac{2d+1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} y(s) \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{h}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} = \frac{({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} + \frac{h}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \end{aligned}$$

$$+ \frac{2d+1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} y(s) \frac{ds}{s}$$

теңсіздікті шығарамыз. $\frac{({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} + \frac{h}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} = g(t)$ деп белгілесек, онда

$$y(t) \leq g(t) + \frac{1+2d}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} y(s) \frac{ds}{s} \quad (3.3.15)$$

бағалауын аламыз. 1.1.23 лемманы (3.3.15) теңсіздігіне қолдансақ

$$y(t) \leq g(t) + \int_a^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2d+1)^k}{\Gamma(k\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{k\alpha-1} \frac{g(s)}{s} \right] ds$$

шығады. Алдыңғы теңсіздікте $|k = k+1|$ деп алмастырсақ

$$y(t) \leq g(t) + (2d+1) \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{g(s)}{s} \right] ds. \quad (3.3.16)$$

Демек,

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \frac{({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} + \frac{h}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \\ &+ \frac{({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a)(2d+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{a} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{(2d+1)h}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{a} \right)^{\alpha} \right] \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

1.1.18 қасиетті қолданып

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{a} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s} \\ &= \left(\log \frac{t}{a} \right)^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

және

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{a} \right)^\alpha \right] \frac{ds}{s} \\
& = \left(\log \frac{t}{a} \right)^{2\alpha} E_{\alpha,2\alpha+1} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right)
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

теңдіктерін аламыз. (3.3.17)-ге (3.3.18), (3.3.19) теңдіктерін қойып

$$\begin{aligned}
& y(t) \leq \\
& \leq ({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a) \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + (2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) \right] \\
& + h \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + (2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha+1} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

(3.3.20) екі жағын да $\left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha}$ көбейтіп, келесі өрнекті шығарамыз

$$\begin{aligned}
& \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} y(t) \leq \\
& \leq ({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + (2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) \right] \\
& + h \left(\log \frac{t}{a} \right) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + (2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha+1} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha \right) \right] \\
& \leq ({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + (2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right] \\
& + h \left(\log \frac{T}{a} \right) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + (2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha+1} \left((2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].
\end{aligned}$$

Яғни,

$$\| u \|_{C_{1-\alpha, \log}((a,T]; L^2(\Omega))} \leq K_1(T) \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + K_2(T) \|f\|_{C((a,T], L^2(\Omega))},$$

мұндағы

$$K_1(T) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + (2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right]$$

және

$$K_2(T) = \left(\log \frac{T}{a} \right) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + (2d + 1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha, 2\alpha+1} \left((2d + 1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

3.3.2 Адамар туындысы қатысқан Кеукті орта теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептердің шешімдерінің априорлы бағалаулары

Бұл бөлімде, келесі түрде берілген кеукті орта теңдеуін

$${}_H D_{a+,t}^\alpha u = a(t, x) \Delta u^m + f(t, x), (t, x) \in (a, T] \times \Omega := Q, \quad (3.3.21)$$

Коши-Дирихле шартымен

$$\lim_{t \rightarrow a} \Gamma(\alpha) \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow a} ({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} u)(t, x) = \phi(x), x \in \Omega, \quad (3.3.22)$$

$$u(t, x) = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega \quad (3.3.23)$$

зерттейміз, мұндағы $m > 1, m \in N$ және $a(t, x), f(t, x)$ теріс емес үзіліссіз функциялар.

3.3.3 – теорема $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ және $\phi \in L^p(\Omega)$ болсын. $u \in C_{1-\alpha, \log}((a, T]; L^p(\Omega))$ функциясы (3.3.21)-(3.3.23) шешімі және

$$\|u\|_{C_{1-\alpha, \log}((a, T]; L^p(\Omega))} \leq K_3(T) \|\phi\|_{L^p(\Omega)} + K_4(T) \|f\|_{C((a, T]; L^p(\Omega))}$$

бағалауы орынды, мұндағы

$$K_3(T) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha, 2\alpha} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right]$$

және

$$K_4(T) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha, 2\alpha+1} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

3.3.3 – теоремасының дәлелдеуі. (3.3.21) теңдікке $pu^{p-1}, (p \geq 2)$ көбейтіп, және Ω бойынша интегралдасақ

$$\int_{\Omega} pu^{p-1} {}_H D_{a+,t}^\alpha u dx$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} a(t, x) p u^{p-1} \Delta u^m dx \\
& - \int_{\Omega} p u^{p-1} f(t, x) dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Осыдан

$$\begin{aligned}
& p \int_{\Omega} a(t, x) u^{p-1} \Delta u^m dx \\
& = p \int_{\partial\Omega} a(t, x) u^{p-1} u^{m-1} \frac{\partial}{\partial \eta} u d\sigma \\
& - p \int_{\Omega} (p-1) a(t, x) u^{p-2} u^{m-1} |\nabla u|^2 dx \\
& = -p \int_{\Omega} (p-1) a(t, x) u^{p-2} u^{m-1} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

(3.3.24)-ке (3.3.25)-гі қойып

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} p u^{p-1} {}_H D_{a+,t}^{\alpha} u dx \\
& + p \int_{\Omega} (p-1) a(t, x) u^{p-2} u^{m-1} |\nabla u|^2 dx \\
& - p \int_{\Omega} u^{p-1} f(t, x) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

теңдігін аламыз. (3.3.26) өрнегіне (3.3.6) және Гелдер теңсіздігін $p = p, q = \frac{p}{p-1}, (p+q = pq)$ қолдансақ

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} {}_H D_{a+,t}^{\alpha} u^p dx + \frac{4p(p-1)d_1}{(p+m-1)^2} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{p+m-1}{2}} \right|^2 dx \\
& - p \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} u^p dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq 0
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

шығады. (3.3.27) үшін $p \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} u^p dx \right)^{1-1/p}$ Юнг теңсіздігін қолданып

$$\int_{\Omega} {}_H D_{a+,t}^{\alpha} u^p dx + \frac{4p(p-1)d_1}{(p+m-1)^2} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{p+m-1}{2}} \right|^2 dx$$

$$-\varepsilon^p \int_{\Omega} |f(t, x)|^p dx - \frac{p-1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\Omega} u^p dx \leq 0, \varepsilon > 0. \quad (3.3.28)$$

Келесі белгілеулер орынды болсын

$$y(t) = \| u(t, \cdot) \|_{L^p(\Omega)}^p, \quad \mathcal{H} = \| f(t, \cdot) \|_{L^p(\Omega)}^p, \quad M = \frac{p-1}{\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Онда (3.3.28)-ден

$${}_H D_{a+,t}^{\alpha} y(t) \leq M y(t) + \varepsilon^p \mathcal{H}. \quad (3.3.29)$$

(3.3.29) теңсіздігінен бастап, алдыңғы теореманың дәлелдеуіндегідей қадамдарды орындау арқылы келесі қорытындыға

$$\begin{aligned} & \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} y(t) \leq \\ & \leq ({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + M \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} E_{\alpha, 2\alpha} \left(M \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \right) \right] \\ & + \mathcal{H} \left(\log \frac{t}{a} \right) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + M \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} E_{\alpha, 2\alpha+1} \left(M \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \right) \right] \\ & \leq ({}_H I_{a+,t}^{1-\alpha} y)(a) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} E_{\alpha, 2\alpha} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} \right) \right] \\ & + \mathcal{H} \left(\log \frac{T}{a} \right) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} E_{\alpha, 2\alpha+1} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

келеміз. Яғни,

$$\| u \|_{C_{1-\alpha, \log}((a, T]; L^p(\Omega))} \leq K_3(T) \| \phi \|_{L^p(\Omega)} + K_4(T) \| f \|_{C((a, T]; L^p(\Omega))},$$

мұндағы

$$K_3(T) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} E_{\alpha, 2\alpha} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} \right) \right]$$

және

$$K_4(T) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha, 2\alpha+1} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

4 КАПУТО-АДАМАР БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ ҚАТЫСҚАН ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЖӘНЕ БАСТАПҚЫ ЕСЕПТЕР

4.1 Капуто-Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебінің шешілімділігі

Келесі кезекте, бөлшек ретті Коши-Дирихле есебін

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t,x) - \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \Delta_x u(t,x) = 0, (t,x) \in (a,\infty) \times \Omega, \quad (4.1.1)$$

$$u(t,x) = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega, \quad (4.1.2)$$

$$u(a,x) = \phi(x), x \in \Omega \quad (4.1.3)$$

қарастырамыз, мұндағы ${}_H^C D_{a+,t}^\alpha$ бөлшек ретті Капуто-Адамар туындысы (1.1.16 – анықтама), реті $\alpha \in (0,1)$ және $\beta > -\alpha$. $H^2(\Omega)$ -

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(u, X_k(x))|^2 < \infty$$

нормасымен анықталған Гильберт-Соболев кеңістігі

$$H^2(\Omega) = \{u: u \in L^2(\Omega); \Delta_x u \in L^2(\Omega)\}.$$

4.1.1 – анықтама (4.1.1)-(4.1.3) есебінің шешімі деп $u(t,x) \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{-\beta} {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u, \Delta_x u \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

4.1.2 – теорема Айталық $\phi(x) \in H^2(\Omega)$ болсын. (4.1.1)-(4.1.3) есептің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде анықталады

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) e_k(x), \quad (4.1.4)$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx,$$

$E_{\alpha,m,l}(z)$ Килбас-Сайго функциясы.

4.1.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Сонымен қатар, $\{\lambda_k > 0, k \in \mathbb{N}\}$ арқылы Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің меншікті мәндерін, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ арқылы сәйкесінше ортонормаланған меншікті функцияларын белгілейік. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ -де ортонормаланған базис болғандықтан, $u(t, x)$ және $\phi(x)$ функцияларын келесі түрде анықталады

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e_k(x), \quad (t, x) \in (a, \infty) \times \Omega, \quad (4.1.7)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.1.8)$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx.$$

(4.1.7) өрнегін (4.1.1) теңдеуіне қойып, (4.1.2) және (4.1.3) шарттарын қолдансақ келесі түрде берілген Коши есебін аламыз

$${}_H^C D_{a+,t}^{\alpha} T_k(t) + \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} T_k(t) = 0, \quad t > a > 0, \quad (4.1.9)$$

$$T_k(a) = \phi_k. \quad (4.1.10)$$

(4.1.9)-(4.1.10) Коши есебінің жалпы шешімі

$$T_k(t) = \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right), \quad (4.1.11)$$

мұндағы

$$\phi_k = 2 \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx.$$

(4.1.1)-(4.1.3) есептің шешімін (4.1.11)-ді (4.1.7)-ке қойып,

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) e_k(x) \quad (4.1.12)$$

түрінде аламыз.

Шешімінің жинақтылығы. (4.1.11) өрнегіне (1.1.27) бағалауын қолданып

$$T_k(t) \leq \frac{|\phi_k|}{1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta + \alpha}}$$

теңсіздігін аламыз. (4.1.12)-ден Парсеваль теңдігінің көмегімен

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq a} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sup_{t \geq a} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) \right|^2 \|e_k(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sup_{t \geq a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right)^2} \\ &\leq \sup_{t \geq a} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

шығады. ${}_H^C D_{a+, t}^\alpha$ және Δ_x операторларын (4.1.12) функциясына қолдансақ

$$\begin{aligned} {}_H^C D_{a+, t}^\alpha u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k {}_H^C D_{a+, t}^\alpha E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) e_k(x) \\ &= - \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) e_k(x) \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

және

$$\begin{aligned} \Delta_x u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) \Delta_x e_k(x) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) e_k(x) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

шығады. Сәйкесінше, (4.1.13)-(4.1.15) өрнектерінен

$$\sup_{t \geq a} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{-\beta} {}_H^C D_{a+, t}^\alpha u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

және

$$\sup_{t \geq a} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

бағалауларын аламыз.

Шешімнің жалғыздығы. $u_1(t, x)$ және $u_2(t, x)$ функциялары (4.1.1)-(4.1.3) есептің шешімдері болсын, онда $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ функциясы (4.1.1) теңдеуін және (4.1.2), (4.1.3) біртекті шарттарын қанағаттандырады. Енді $T_k(t)$ функцияны келесі теңдік түрінде анықтайық

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x), k \in N, t \geq a. \quad (4.1.16)$$

${}_H^C D_{a+,t}^{\alpha}$ операторын (4.1.16) теңдігіне қолданып, (4.1.1) теңдеуі мен (4.1.2), (4.1.3) біртекті шарттарын ескере отырып қолдансақ

$$\begin{aligned} {}_H^C D_{a+,t}^{\alpha} T_k(t) &= \int_{\Omega} {}_H^C D_{a+,t}^{\alpha} u(t, x) e_k(x) dx \\ &= \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} \int_{\Omega} \Delta_x u(t, x) e_k(x) dx \\ &= \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} \int_{\Omega} u(t, x) \Delta_x e_k(x) dx \\ &= - \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} \lambda_k \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) dx \\ &= - \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta} \lambda_k T_k(t), k \in N \end{aligned}$$

шығады. Демек, (4.1.16) функциясы (4.1.10) біртекті шартымен берілген (4.1.9) теңдеуінің шешімі. Онда (4.1.9)-(4.1.10) есептің шешімінің жалғыздығынан

$$T_k(t) = \int_{\Omega} u(t, x) e_k(x) = 0 \quad (4.1.17)$$

аламыз. Онда $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ жүйесінің $L^2(\Omega)$ кеңістігінде толықтығынан, (4.1.17)-ден $u(t, x) \equiv 0$ екендігі шығады. Демек, $u_1(t, x) = u_2(t, x)$, яғни (4.1.1)-(4.1.3) есептің шешімі жалғыз.

Шешімнің оптималды бағалауы.

Лаплас операторы үшін Дирихле есебінің λ_k меншікті мәндері $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \nearrow +\infty$. Сонда $u(t, x)$ шешімінің бағалауы келесі түрде

$$\begin{aligned}
\| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right) \right|^2 \| e_k \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right)^2} \\
&\leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \\
&\leq \frac{M_1^2}{\left(1 + \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right)^2}
\end{aligned}$$

болады, демек

$$\| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1}{1 + \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta}}.$$

Енді $u(t, x)$ шешімнің төменгі бағалауын дәлелдейміз. Осы ретте, Парсевал теңдігін пайдаланып

$$\begin{aligned}
\| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right) \right|^2 \| e_k \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \Gamma(1-\alpha) \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right)^2} \\
&= \frac{|\phi_1|^2}{\left(1 + \Gamma(1-\alpha) \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right)^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \Gamma(1-\alpha) \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right)^2} \\
&\geq \frac{m_1^2}{\left(1 + \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha+\beta} \right)^2}
\end{aligned}$$

теңсіздігін аламыз.

Осыдан, (4.1.1)-(4.1.3) есептің шешімінің екі жақты бағалауы келесі түрде болады

$$\frac{m_1}{1 + \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}} \leq \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1}{1 + \lambda_1 \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha}}.$$

4.2 Капуто-Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши-Нейман есебінің шешілімділігі

Келесі түрде берілген Коши-Нейман есебін қарастырамыз

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t, x) - \left(\log \frac{t}{a}\right)^\beta \Delta_x u(t, x) = 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (4.2.1)$$

$$\partial_\nu u(t, x) = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega, \quad (4.2.2)$$

$$u(a, x) = \phi(x), x \in \Omega. \quad (4.2.3)$$

4.2.1 – анықтама (4.2.1)-(4.2.3) есебінің шешімі деп $u \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{-\beta} {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u, \Delta_x u \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ функциясын айтамыз.

4.2.2 – теорема Айталық, $\phi \in H^2(\Omega)$ болсын. Онда (4.2.1)-(4.2.3) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі формуламен анықталады

$$u(t, x) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha} \right) e_k(x), \quad (4.2.4)$$

мұндағы

$$\phi_0 = \int_{\Omega} \phi(x) dx, \phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx, k \in N$$

және $E_{\alpha, m, l}(z)$ - Килбас-Сайго функциясы.

4.2.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. Айталық $\{\lambda_k \geq 0: k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ Лаплас операторы үшін қойылған Нейман есебінің меншікті мәндері, ал $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ сәйкесінше ортонормаланған меншікті функциялары болсын. $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис болғандықтан, $u(t, x)$ және $\phi(x)$ функцияларын келесі түрде жазамыз

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e_k(x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (4.2.5)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), \quad (4.2.6)$$

мұндағы

$$\phi_k = \int_{\Omega} \phi(x) e_k(x) dx$$

және

$$\phi_0 = \int_{\Omega} \phi(x) dx.$$

Алдыңғы теоремадағы әрекеттерді қолданып, (4.2.1)-(4.2.3) есептің шешімін келесі түрде аламыз

$$u(t, x) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) e_k(x). \quad (4.2.10)$$

Шешімнің жинақтылығы. (1.1.27) теңсіздігін (4.2.9) теңдігіне қолданып, келесі теңсіздікті аламыз

$$T_k(t) \leq |\phi_0| + \frac{|\phi_k|}{1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha}}.$$

Парсеваль теңдігі мен (4.2.10) өрнегінен

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq a} \| u(t, \cdot) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ &= \sup_{t \geq a} \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) \right|^2 \| e_k(x) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sup_{t \geq a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\phi_k|^2}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right)^2} \\ &\leq \sup_{t \geq a} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right)^2} \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.2.11)$$

шығады. ${}_H^C D_{a+,t}^\alpha u$ және Δ_x операторларын қолданып

$$\begin{aligned} {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k {}_H^C D_{a+,t}^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha'},\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) e_k(x) \\ &= - \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha'},\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) e_k(x) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

және

$$\begin{aligned} \Delta_x u(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha'},\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) \Delta_x e_k(x) \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \phi_k E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha'},\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) e_k(x) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

аламыз. (4.2.11)-(4.2.13) өрнектерінен

$$\sup_{t \geq a} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{-\beta} {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

және

$$\sup_{t \geq a} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |\phi_k|^2 = \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty$$

шығады.

Шешімнің жалғыздығы. (4.2.1)-(4.2.3) есептің шешімінің жалғыздығын дәлелдегенде келтірілген әдісті пайдаланып дәлелдейміз.

4.3 Капуто-Адамар туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін Коши есебінің шешілімділігі

Бөлшек ретті диффузия есебін

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t, x) - \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \Delta_x u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (a, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (4.3.1)$$

бастапқы шартымен

$$u(a, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (4.3.2)$$

зерттейміз. Айталық, $H^2(\mathbb{R}^N)$

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \xi^2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

нормасымен анықталған Гильберт кеңістігі

$$H^2(\mathbb{R}^N) = \{f: f \in L^2(\mathbb{R}^N); \Delta_x f \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

болсын, мұндағы $\hat{f}(\xi)$ кері Фурье түрлендіруі.

4.3.1 – анықтама (4.3.1)-(4.3.2) есептің шешімі деп $u \in C([a, \infty); L^2(\mathbb{R}^N))$, $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{-\beta} {}^c D_{a+,t}^\alpha u, \Delta_x u \in C([a, \infty); L^2(\mathbb{R}^N))$ функциясын айтамыз.

4.3.2 – теорема Айталық, $\alpha \in (0,1), \beta > -\alpha$ және $\phi \in H^2(\mathbb{R})$ болсын, онда (4.3.1)-(4.3.2) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) d\xi \quad (4.3.3)$$

анықталады, мұндағы

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-is\xi} \phi(s) ds$$

және $E_{\alpha,m,l}(z)$ Килбас-Сайго функциясы. Сонымен қатар, $u(t, x)$ шешімі келесі бағалауларды қанағаттандырады

$$\|u(t, \cdot)\|_{C([a, \infty); L^2(\mathbb{R}^N))} \leq \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t \in (a, +\infty)} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{-\beta} {}^c D_{a+,t}^\alpha u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\sup_{t \in (a, +\infty)} \|\Delta_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi(\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}.$$

4.3.2 – теоремасының дәлелдеуі.

Шешімнің бар болуы. (4.3.1)-(4.3.2) есебіне Фурье түрлендіруін қолданып, келесі есепті аламыз

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) + |\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in (a, \infty) \times \mathbb{R}^N, \quad (4.3.4)$$

$$\hat{u}(a, \xi) = \hat{\phi}(\xi). \quad (4.3.5)$$

(4.3.4)-(4.3.5) есебінің шешімі [4, 233 бет] келесі өрнекпен анықталады

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right). \quad (4.3.6)$$

(4.3.6)-ға кері Фурье түрлендіруін қолданып, Коши есебінің шешімін

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \hat{\phi}(\xi) E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) d\xi$$

аламыз.

Шешімнің жинақтылығы. (1.1.27) бағалауы мен Планшерель теоремасын қолданып, келесі теңдікті аламыз

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (a, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x)|^2 dx &= \sup_{t \in (a, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{t \in (a, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) \right|^2 d\xi \\ &\leq \|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\phi(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

${}_H^C D_{a+,t}^\alpha$ операторын $u(t, x)$ функциясына қолдансақ

$$\begin{aligned} &{}_H^C D_{a+,t}^\alpha \left[E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) \right] \\ &= -|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha'}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha} \right) \end{aligned}$$

өрнегі шығады. Демек,

$$\sup_{t \in (a, +\infty)} \left\| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{-\beta} {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \in (a, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) \right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} ||\xi|^2 \hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq ||\phi(\cdot)||_{H^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Сол сияқты, Δ_x операторы үшін де

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in (a, +\infty)} ||\Delta_x u(t, \cdot)||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \\
&\leq \sup_{t \in (a, +\infty)} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^4 |\hat{\phi}(\xi)|^2 \left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-|\xi|^2 \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta + \alpha} \right) \right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} ||\xi|^2 \hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq ||\phi(\cdot)||_{H^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

орынды.

Шешімнің жалғыздығы. $u_1(t, x)$ және $u_2(t, x)$ функциялары (4.3.1)-(4.3.2) есебінің шешімдері болсын. Онда $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ (4.3.1) теңдеуі мен (4.3.2) біртекті бастапқы шартын қанағаттандырады. Келесі функцияны қарастырамыз

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx, \quad t > a, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (4.3.7)$$

(4.3.1) теңдеуін ескере отырып, ${}_H^C D_{a+, t}^\alpha$ операторын (4.3.7)-ге қолдансақ

$$\begin{aligned}
{}_H^C D_{a+, t}^\alpha \hat{u}(t, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} {}_H^C D_{a+, t}^\alpha u(t, x) dx = \\
&= \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \Delta_x u(t, x) dx = \\
&= - \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 \hat{u}(t, x))] \\
&= - \left(\log \frac{t}{a} \right)^\beta |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi), \quad t > a
\end{aligned}$$

шығады. Бастапқы шарт негізінде

$$\hat{u}(a, \xi) = 0$$

шығады. (4.3.4) теңдеуі мен (4.3.5) біртекті шартынан $\hat{u}(t, \xi) = 0, t > a, \xi \in \mathbb{R}^N$ орынды, яғни

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(t, x) dx = 0, t > a, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Соңғы теңсіздікке кері Фурье түрлендіруін қолданып, $u(t, x) \equiv 0$ аламыз, $u_1(t, x) = u_2(t, x)$. Демек, (4.3.1)- (4.3.2) есебінің шешімі жалғыз.

4.4 Капуто-Адамар туындысы үшін Лейбниц ережесінің аналогы және оның сызықты және квазисызықты есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданылуы

Бұл бөлімде Адамар-Капуто туындысы үшін Лейбниц ережесінің аналогын алып және олардың кейбір бөлшек ретті диффузия және толқын теңдеулері үшін қойылған есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданылады.

4.4.1 – лемма Айталық, $u, v \in AC[a, T], 0 < \alpha \leq 1$ болсын. Онда

$$\begin{aligned} {}^C_H D_{a+,t}^\alpha [uv](t) &= u(t) {}^C_H D_{a+,t}^\alpha v(t) + v(t) {}^C_H D_{a+,t}^\alpha u(t) \\ &- \frac{(u(a) - u(t))(v(a) - v(t))}{\Gamma(1 - \alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^\alpha} - \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{(u(s) - u(t))(v(s) - v(t))}{s \left(\log \frac{t}{s}\right)^{1+\alpha}} ds. \end{aligned}$$

4.4.1 – лемманың дәлелдеуі.

$$\begin{aligned} {}^C_H D_{a+,t}^\alpha [uv](t) &- u(t) {}^C_H D_{a+,t}^\alpha v(t) - v(t) {}^C_H D_{a+,t}^\alpha u(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{(u'(s)v(s) + v'(s)u(s))ds}{\left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} \\ &- \frac{u(t)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{v'(s)ds}{\left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} - \frac{v(t)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t \frac{u'(s)ds}{\left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{[u'(s)(v(s)-v(t)) + v'(s)(u(s)-u(t))]}{\left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{[(u(s)-u(t))(v(s)-v(t))]' ds}{\left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Бөліктеп интегралдасақ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{[(u(s)-u(t))(v(s)-v(t))]' ds}{\left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha} = \\
&- \frac{(u(a)-u(t))(v(a)-v(t))}{\Gamma(1-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^\alpha} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{(u(s)-u(t))(v(s)-v(t)) ds}{s \left(\log \frac{t}{s}\right)^\alpha}.
\end{aligned}$$

4.4.2 – ескерту u, v функцияларының таңбалары сәйкес келсе, онда

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha (uv)(t) \leq u(t) {}_H^C D_{a+,t}^\alpha v(t) + v(t) {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t).$$

Егер $u = v$ болса, келесіні аламыз

$$2u(t) {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u(t) \geq {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u^2(t). \quad (4.4.1)$$

Сонда

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha u^p \leq pu^{p-1} {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u, \quad (4.4.2)$$

мұндағы $p \geq 2$ және $u \geq 0$.

Бөлшек ретті диффузия теңдеуі. Жоғарыдағы нәтижелердің қолданысы ретінде келесі түрдегі бөлшек ретті диффузия теңдеуін

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha u = b(t) \Delta_x u + c(t, x)u + f(t, x), (t, x) \in (a, T] \times \Omega = Q, \quad (4.4.3)$$

Дирихле шеттік шартымен

$$u(t, x) = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega \quad (4.4.4)$$

немесе Нейман шеттік шартымен

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega, \quad (4.4.5)$$

және Коши шартымен

$$u(a, x) = u_0(x) \quad (4.4.6)$$

қарастырамыз, мұндағы $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ - сыртқы нормал туынды және

(A) $b(t)$ теріс емес үзіліссіз функция;

(B) $\|c(t, x)\|_{C([a, T]; L^2(\Omega))} = d, c(t, x) \leq 0;$

(C) $\|f(t, x)\|_{C([a, T]; L^2(\Omega))} = h.$

4.4.2 – теорема Айталық, $u_0 \in L^2(\Omega)$ және (A), (B), (C) орындалсын. Егер $u(t, x)$ функциясы әрбір $t \in (a, T]$ үшін (4.4.3) теңдеуін, (4.4.6) Коши шартын және (4.4.4) немесе (4.4.5) шекаралық шарттарының бірін қанағаттандырса, онда келесі бағалау орынды

$$\|u\|_{C((a, T]; L^2(\Omega))} \leq C_1(T) \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + C_2(T) \|f\|_{C((a, T]; L^2(\Omega))}, \quad (4.4.7)$$

мұндағы

$$C_1(T) = 1 + (2d + 1) \int_a^T \left[E_{\alpha, \alpha} \left((2d + 1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s},$$

және

$$C_2(T) = \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + (2d + 1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha, 2\alpha+1} \left((2d + 1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

4.4.2 – теореманың дәлелдеуі. (4.4.3) теңдеуінің әрбір мүшесін $u(t, x)$ функциясына көбейтіп, Ω бойынша интегралдаймыз

$$\int_{\Omega} ({}_H^c D_{a+, t}^\alpha u) u dx = b(t) \int_{\Omega} (\Delta_x u) u dx + \int_{\Omega} c(t, x) u^2 dx + \int_{\Omega} f(t, x) u dx.$$

(4.4.1) және $p, q = 2, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ үшін Гельдер теңсіздігін пайданып, Ω бойынша интегралдаймыз

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^C D_{a+,t}^\alpha \int_{\Omega} u^2 dx &\leq b(t) \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - b(t) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \\ &+ \int_{\Omega} c(t, x) u^2 dx + \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Сәйкесінше, (B) және $-b(t) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \leq 0$ көмегімен

$${}^C D_{a+,t}^\alpha \int_{\Omega} u^2 dx \leq 2d \int_{\Omega} u^2 dx + 2 \left(\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

теңсіздікті аламыз. (4.4.8) теңсіздіктің соңғы мүшесіне Юнг теңсіздігін қолданып, келесі өрнекті аламыз

$${}^C D_{a+,t}^\alpha \int_{\Omega} u^2 dx \leq (2d + 1) \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx. \quad (4.4.9)$$

(4.4.9) теңсіздігіне (C) белгілеуін және $y(t) = \|u(t, x)\|_{L^2(\Omega)}^2$ қолданамыз. Демек, біз келесі түрдегі бағалауды аламыз

$${}_H D_{a+,t}^\alpha y(t) \leq (2d + 1)y(t) + h. \quad (4.4.10)$$

(4.4.10) теңсіздігінің екі жағына да ${}_H I_{a+,t}^\alpha$ интегралды және 1.1.17 – леммасын қолданып келесі өрнекті шығарамыз

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(a) + \frac{2d + 1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} y(s) \frac{ds}{s} + \\ &+ \frac{h}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} = \\ &= y(a) + \frac{h}{\Gamma(1 + \alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha + \\ &+ \frac{2d + 1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} y(s) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

$y(a) + \frac{h}{\Gamma(1 + \alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^\alpha = g(t)$ деп алмастыру енгізіп

$$y(t) \leq g(t) + \frac{1 + 2d}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} y(s) \frac{ds}{s}. \quad (4.4.11)$$

1.1.23 – лемманы (4.4.11) теңсіздікке қолданамыз

$$y(t) \leq g(t) + \int_a^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2d+1)^k}{\Gamma(k\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{k\alpha-1} \frac{g(s)}{s} \right] ds.$$

$k = k + 1$ деп алмастырып, келесі теңсіздікті аламыз

$$y(t) \leq g(t) + (2d+1) \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{g(s)}{s} \right] ds.$$

Демек

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(a) + \frac{h}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \\ &+ y(a)(2d+1) \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{(2d+1)h}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{a} \right)^{\alpha} \right] \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

1.1.18 – қасиетін қолданып, келесі есептеулерге келеміз

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \right] \frac{ds}{s} \\ &= \left(\log \frac{t}{a} \right)^{2\alpha} E_{\alpha,2\alpha+1} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

(4.4.13) есептеуін (4.4.12) теңсіздігінде қолданамыз

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(a) \left[1 + (2d+1) \int_a^T \left[E_{\alpha,\alpha} \left((2d+1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha} \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s} \right] \\ &+ h \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + (2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} E_{\alpha,2\alpha+1} \left((2d+1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^{\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Онда

$$\| u \|_{C((a,T];L^2(\Omega))} \leq C_1(T) \| u_0 \|_{L^2(\Omega)} + C_2(T) \| f \|_{C((a,T],L^2(\Omega))},$$

мұндағы

$$C_1(T) = 1 + (2d + 1) \int_a^T \left[E_{\alpha, \alpha} \left((2d + 1) \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s}$$

және

$$C_2(T) = \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + (2d + 1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha, 2\alpha+1} \left((2d + 1) \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

Бөлшек ретті кеуекті орта теңдеуі. Енді, келесі түрде берілген бөлшек ретті кеуекті орта теңдеуін

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha u = a(t, x) \Delta u^m + f(t, x), (t, x) \in (a, T] \times \Omega := Q, \quad (4.4.14)$$

Коши-Дирихле шарттарымен

$$u(a, x) = \phi(x), x \in \Omega, \quad (4.4.15)$$

$$u(t, x) = 0, t > a > 0, x \in \partial\Omega \quad (4.4.16)$$

қарастырамыз, мұндағы $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$ және $a(t, x), f(t, x)$ теріс емес, үзіліссіз функциялар.

4.4.3 – теорема Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ және $\phi \in L^p(\Omega)$ болсын. Айталық $u \in C((a, T]; L^p(\Omega))$ функциясы (4.4.14)-(4.4.16) есебінің шешімі болсын, онда

$$\|u\|_{C((a,T];L^p(\Omega))} \leq C_3(T) \|\phi\|_{L^p(\Omega)} + C_4(T) \|f\|_{C((a,T];L^p(\Omega))}$$

орынды, мұндағы

$$C_3(T) = 1 + M \int_a^T \left[E_{\alpha, \alpha} \left(M \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s}$$

және

$$C_4(T) = \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha, 2\alpha+1} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

4.4.3 – теоремасының дәлелдеуі. (4.4.14) теңдеуіне pu^{p-1} , $(p \geq 2)$ -ге көбейтіп, және Ω бойынша интегралдаймыз

$$\int_{\Omega} pu^{p-1} {}_H^C D_{a+,t}^\alpha u dx - \int_{\Omega} a(t, x) pu^{p-1} \Delta u^m dx -$$

$$-\int_{\Omega} pu^{p-1}f(t,x)dx = 0. \quad (4.4.17)$$

Сонымен қатар келесі теңдік орынды

$$\begin{aligned} p \int_{\Omega} a(t,x)u^{p-1}\Delta u^m dx &= p \int_{\partial\Omega} a(t,x)u^{p-1}u^{m-1}\frac{\partial}{\partial\eta}u d\sigma \\ &\quad - p \int_{\Omega} (p-1)a(t,x)u^{p-2}u^{m-1}|\nabla u|^2 dx \\ &= -p \int_{\Omega} (p-1)a(t,x)u^{p-2}u^{m-1}|\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

(4.4.17) теңдікке соңғы нәтижені қолданамыз

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} pu^{p-1} {}^C D_{a+,t}^{\alpha} u dx + p \int_{\Omega} (p-1)a(t,x)u^{p-2}u^{m-1}|\nabla u|^2 dx \\ - p \int_{\Omega} u^{p-1}f(t,x)dx = 0. \end{aligned}$$

Алдыңғы теңдікке (4.4.2) мен $p = p, q = \frac{p}{p-1}, (p+q = pq)$ Гелдер теңсіздігін қолданып, келесі бағалауды аламыз

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} {}^C D_{a+,t}^{\alpha} u^p dx + \frac{4p(p-1)d_1}{(p+m-1)^2} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{p+m-1}{2}} \right|^2 dx \\ - p \left(\int_{\Omega} |f(t,x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} u^p dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

Демек, $p \left(\int_{\Omega} |f(t,x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} u^p dx \right)^{1-1/p}$ үшін Юнг теңсіздігін қолданып, (4.4.19)-ті келесі түрде жазамыз

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} {}^C D_{a+,t}^{\alpha} u^p dx + \frac{4p(p-1)d_1}{(p+m-1)^2} \int_{\Omega} \left| \nabla u^{\frac{p+m-1}{2}} \right|^2 dx \\ - \varepsilon^p \int_{\Omega} |f(t,x)|^p dx - \frac{p-1}{\varepsilon^{p-1}} \int_{\Omega} u^p dx \leq 0, \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Төмендегі белгілеулерден

$$y(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad \mathcal{H}(t) = \|f(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad M = \frac{p-1}{\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}},$$

келесі теңсіздікті аламыз

$${}_H^C D_{a+,t}^\alpha y(t) \leq M y(t) + \varepsilon^p \mathcal{H}(t). \quad (4.4.21)$$

(4.4.21)-ден бастап, алдыңғы теореманың дәлелдеуіндегі әрекеттерді орындау арқылы келесі қорытындыға келеміз

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(a) \left[1 + M \int_a^T \left[E_{\alpha,\alpha} \left(M \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s} \right] \\ &+ \mathcal{H} \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha+1} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right]. \end{aligned}$$

Яғни,

$$\|u\|_{C((a,T];L^p(\Omega))} \leq C_3(T) \|\phi\|_{L^p(\Omega)} + C_4(T) \|f\|_{C((a,T];L^p(\Omega))},$$

мұндағы

$$C_3(T) = 1 + M \int_a^T \left[E_{\alpha,\alpha} \left(M \left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha \right) \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{ds}{s}$$

және

$$C_4(T) = \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha E_{\alpha,2\alpha+1} \left(M \left(\log \frac{T}{a} \right)^\alpha \right) \right].$$

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыс уақытқа тәуелді айнымалы коэффициентті уақыт бойынша бөлшек ретті туынды қатысқан сызықты және квазисызықты диффузиялық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік және бастапқы есептердің шешілімділігін және шешімдерінің кейбір сапалық қасиеттерін зерттеуге арналған. Уақыт бойынша бөлшек ретті туынды ретінде Капуто, Риман-Лиувилль, Адамар және Капуто-Адамар мағыналарындағы туындылар қарастырылған. Кеңістік айнымалысы бойынша Лаплас, кеуекті орта операторы, өзгешеленген эллипстік оператор, p -Лаплас операторы, орташа қисықтық операторы және Кирхгоф операторы қарастырылған.

Диссертациялық жұмыста келесі негізгі нәтижелер алынды:

- Уақыт бойынша Риман-Лиувилль, Капуто, Адамар, Капуто-Адамар бөлшек ретті туындылары қатысқан өзгешеленген диффузия теңдеулері үшін Коши-Дирихле, Коши-Нейман және Коши есептерінің шешілімділігі зерттелінді.
- Уақыт бойынша Капуто туындысы қатысқан айнымалы коэффициентті сызықты және квазисызықты параболалық есептердің шешімдерінің уақыт бойынша асимптотикалық бағалаулары алынды.
- Адамар және Капуто-Адамар туындылары үшін Лейбниц ережесінің аналогтары алынып, олардың бөлшек ретті диффузия теңдеулеріне қойылған бастапқы-шеттік есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданысы келтірілді.

Диссертациялық жұмыстың нәтижелері толығымен жаңа және белгілі нәтижелерді өзіне қамтиды. Алынған нәтижелер негізінен теориялық болып табылады және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының және бөлшек ретті есептеулер теориясының аясын кеңейтуге үлес қосады. Сонымен қатар диссертацияда алынған нәтижелер аномалды диффузиялық процестердің кейбір мәселелерін моделдеуде қолданылады. Негізгі нәтижелерді алуда Килбас-Сайго функциясының екі жақты бағалаулары және жартылай сызықты бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі шешімінің қасиеттері, сондай-ақ Лейбниц ережесінің аналогтары мен Гронуол леммасының бөлшек ретті аналогтары пайдаланылды.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 S. Dipierro, E. Valdinoci, A simple mathematical model inspired by the Purkinje cells: from delayed travelling waves to fractional diffusion // Bull. Math. Biol. – 2018, - V.80, - №7, P. 1849–1870.
- 2 V. E. Tarasov, Handbook of fractional calculus with applications, Vol. 4, Applications in Physics, Part A. // Berlin, Boston: De Gruyter, - 2019.
- 3 F. Mainardi, Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models // Imperial College Press, London, - 2010.
- 4 R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion // A fractional dynamics approach, Phys. Rep., - 2000, - V.339, P. 1–77.
- 5 V. E. Tarasov, Review of some promising fractional physical models // Internat. J. Modern Phys. B, - 2013, V.27, - №9, 1330005.
- 6 V. V. Uchaikin, Fractional Calculus (Method drobnnykh proizvodnykh). // Artishok, – 2008, (in Russian).
- 7 R. R. Nigmatullin, The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Stat. Sol. -1986, - V.133, P. 299–318.
- 8 M. Allen, L. Caffarelli, A. Vasseur, A parabolic problem with a fractional time derivative // Arch. Ration. Mech. Anal., -2016, - V.221, - №2, P. 603–630.
- 9 A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. - 2006.
- 10 A. M. Nakhushhev, Fractional calculus and its applications. (Drobnoe ischislenie i ego primeneniye.) // Fizmatlit, Moskva, -2003, (in Russian).
- 11 I. Podlubny, Fractional Differential Equations // Academic Press, San Diego, - 1999.
- 12 S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives // Theory and Applications, Gordon and Breach, Amsterdam, - 1993.
- 13 B.K. Turmetov, B.J. Kadirkulov, On the Solvability of an Initial-Boundary Value Problem for a Fractional Heat Equation with Involution. // Lobachevskii J Math., - 2022, - V. 43, - P. 249–262.
- 14 A. V. Pskhu, Partial differential equations of fractional order. (Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka) // Moscow: Nauka, – 2005, (in Russian).
- 15 A. V. Pskhu, The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order. (Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка) // Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Math., - 2009, - V. 73, - №2, P. 141–182 (in Russian).
- 16 B. K. Turmetov, B. J. Kadirkulov, On a problem for nonlocal mixed-type fractional order equation with degeneration. // Chaos Solit. Fract. – 2021, - V. 146, -P. 1–5.
- 17 M. Borikhanov, M. Ruzhansky, B. Torebek, Qualitative properties of solutions to a nonlinear time-space fractional diffusion equation, // Fractional Calculus and Applied Analysis, -2023, - V. 26, №1, P. 111–146.

- 18 M. O. Mamchuev, Kraevye zadachi dlya uravnenii i sistem uravnenii s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka, Izdatelstvo KBNTs RAN, Nalchik, - 2013.
- 19 M. O Mamchuev, Solutions of the main boundary value problems for the time-fractional telegraph equation by the Green function method. //Fract. Calc. Appl. Anal., - 2017, - V. 20, - №1, P. 190-211.
- 20 A. Alsaedi, B. Ahmad, M. Kirane, Maximum principle for certain generalized time and space fractional diffusion equations // Quart. Appl. Math. – 2015, - V.73, - №1, P. 163–175.
- 21 J. D. Djida, J. J. Nieto, I. Area, Nonlocal time porous medium equation with fractional time derivative // Rev. Mat. Complut. – 2019, - V.32, - №2, P. 273–304.
- 22 H. Dong, D. Kim, Time fractional parabolic equations with measurable coefficients and embeddings for fractional parabolic Sobolev spaces // Int. Math. Res. Not. IMRN. -2021, - V.22, P. 17563– 17610.
- 23 A. Kubica, M. Yamamoto, Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2018, - V.21, - №2, P. 276–311.
- 24 Y. Luchko, Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // J. Math. Anal. Appl. – 2009, - V.351, - №1, P. 218–223.
- 25 V. Vergara, R. Zacher, A priori bounds for degenerate and singular evolutionary partial integro-differential equations // Nonlinear Anal. – 2010, - V.73, - №11, P. 3572–3585.
- 26 V. Vergara, R. Zacher, Stability, instability and blowup for time fractional and other nonlocal in time semilinear subdiffusion equations // J. Evol. Equ., - 2017, - V.17, P. 599–626.
- 27 R. Zacher, Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients // J. Math. Anal. Appl. -2008, - V.348, - №1, P. 137–149.
- 28 Z. Li, Y. Luchko, M. Yamamoto, Asymptotic estimates of solutions to initial-boundary-value problems for distributed order time-fractional diffusion equations // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2014, - V.17, - №4, P. 1114–1136.
- 29 Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Initial boundary value problems for multiterm time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients // Appl. Math. Comput. – 2015, - V.257, P. 381– 397.
- 30 V. Vergara, R. Zacher, Optimal decay estimates for time-fractional and other nonlocal subdiffusion equations via energy methods // SIAM J. Math. Anal., - 2015, - V.47, -№1, P. 210–239.
- 31 E. Affili, E. Valdinoci, Decay estimates for evolution equations with classical and fractional time-derivatives // J. Differential Equations, - 2019, - V.266, - №7, P. 4027–4060.
- 32 S. Dipierro, E. Valdinoci, V. Vespri, Decay estimates for evolutionary equations with fractional time-diffusion // J. Evol. Equ., - 2019, - V.19, - №2, P. 435–462.

- 33 Yu. Luchko and M. Yamamoto, On the maximum principle for a time-fractional diffusion equation // *Frac. Calc. Appl. Anal.* – 2017, - V.20, P. 1131-1145.
- 34 M. Al-Refai, Yu. Luchko, Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications // *Fract. Calc. Appl. Anal.* – 2014, - V.17, - № 2, P. 483-498.
- 35 J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions donnees par leur developpement de Taylor // *J. Pure Appl. Math.* – 1892, - V.4, - №8, P. 101-186.
- 36 M. Bologna, A. Svenkeson, B. J. West, P. Grigolini, Diffusion in heterogeneous media: An iterative scheme for finding approximate solutions to fractional differential equations with time-dependent coefficients // *J. Comp. Phys.* – 2015, - V.293, P. 297–311.
- 37 F. S. Costa, E. C. de Oliveira, A. R. G. Plata, Fractional diffusion with time-dependent diffusion coefficient // *Rep. Math. Phys.* – 2021, - V.87, P. 59–79.
- 38 K. S. Fa, E. K. Lenzi, Time-fractional diffusion equation with time dependent diffusion coefficient // *Phys. Rev. E.* – 2005, - V.72, 011107.
- 39 J. Hristov, Subdiffusion model with time-dependent diffusion coefficient // *Integral-balance solution and analysis, Thermal Science*, - 2017, - V.21, P. 69–80.
- 40 A. A. Kilbas, M. Saigo, On the solution of integral equations of Abel-Volterra type // *Differential and Integral Equations.* – 1995, - V.8, P. 993–1011.
- 41 L. Boudabsa, T. Simon, Some properties of the Kilbas-Saigo function // *Mathematics*, - 2021, - V.9, - № 3:227.
- 42 A.G. Smadiyeva, Initial-boundary value problem for the time-fractional degenerate diffusion equation // *JMMCS.* - 2022, - V.1, - № 113, 32–41.
- 43 A.G. Smadiyeva, Well-posedness of the initial-boundary value problems for the time-fractional degenerate diffusion equations // *Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series.* – 2022, - V.3, - № 107, P. 145-151.
- 44 A. G. Smadiyeva, Degenerate time-fractional diffusion equation with initial and initial-boundary conditions // *Georgian Mathematical Journal.* - 2023, - V. 30, P. 435–443.
- 45 M. Borikhanov, A. G. Smadiyeva, Cauchy problems for the time-fractional degenerate diffusion equations // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science.* - 2023, - V. 117, P. 15-23.
- 46 A. G. Smadiyeva, B. T. Torebek, Decay estimates for the time-fractional evolution equations with time-dependent coefficients // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* - 2023, - V. 479:2276, 20230103.
- 47 A. G. Smadiyeva, Degenerate Diffusion Equation with the Hadamard Time-Fractional Derivative//*Women in Analysis and PDE: Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center.* —2024. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-57005-6-38>.
- 48 A. Wiman, Uber den Fundamental Salz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$ // *Acta Math.* - 1905, - V. 29, P. 191-201.
- 49 G. M. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ // *C. R. Acad. Sci.*

Paris. – 1903, - V. 137, P. 554-558.

50 Ahmad Y. A. Salamooni, D. D. Pawar, Continuous dependence of a solution for fractional order Cauchy-type problem // Partial Differential Equations in Applied Mathematics, -2021, V. 4.

51 O.A. Ladyzhenskaya, Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki (Boundary Value Problems of Mathematical Physics) // Moscow: Nauka, -1973.

52 S. Dipierro, X. Ros-Oton, E. Valdinoci, Nonlocal problems with Neumann boundary conditions // Rev. Mat. Iberoam. – 2017, - V. 33, - № 2, P. 377-416.